

Q and R are the matrices sought. In summary,

$$X = QR,$$

in which R is the triangular matrix obtained from the Householder reduction of X (see (1.26) and (1.27)) and

$$Qe_j = P_1 P_2 \cdots P_{m-1} e_j.$$

ALGORITHM 1.3. Householder Orthogonalization

1. Define $X = [x_1, \dots, x_m]$
2. For $k = 1, \dots, m$, Do
3. If $k > 1$ compute $r_k := P_{k-1} P_{k-2} \cdots P_1 x_k$
4. Compute w_k using (1.23), (1.24), (1.25)
5. Compute $r_k := P_k r_k$ with $P_k = I - 2w_k w_k^T$
6. Compute $q_k = P_1 P_2 \cdots P_k e_k$
7. EndDo

Note that line 6 can be omitted since the q_i 's are not needed in the execution of the next steps. It must be executed only when the matrix Q is needed at the completion of the algorithm. Also, the operation in line 5 consists only of zeroing the components $k+1, \dots, n$ and updating the k th component of r_k . In practice, a work vector can be used for r_k , and its nonzero components after this step can be saved into an upper triangular matrix. Since the components 1 through k of the vector w_k are zero, the upper triangular matrix R can be saved in those zero locations that would otherwise be unused.

1.8 Canonical Forms of Matrices

This section discusses the reduction of square matrices into matrices that have simpler forms, such as diagonal, bidiagonal, or triangular. Reduction means a transformation that preserves the eigenvalues of a matrix.

Definition 1.5. Two matrices A and B are said to be similar if there is a nonsingular matrix X such that

$$A = XBX^{-1}.$$

The mapping $B \rightarrow A$ is called a similarity transformation.

It is clear that *similarity* is an equivalence relation. Similarity transformations preserve the eigenvalues of matrices. An eigenvector u_B of B is transformed into the eigenvector $u_A = Xu_B$ of A . In effect, a similarity transformation amounts to representing the matrix B in a different basis.

We now introduce some terminology.

1. An eigenvalue λ of A has *algebraic multiplicity* μ if it is a root of multiplicity μ of the characteristic polynomial.
2. If an eigenvalue is of algebraic multiplicity one, it is said to be *simple*. A nonsimple eigenvalue is *multiple*.

$\dim S_{\lambda_i} = 8$

$\dim S_{\lambda_i} = \{v : Av = \lambda_i v \text{ or } v = 0\} \equiv \ker(A - \lambda_i I)$

$\dim(\ker(A - \lambda_i I)) = 8$

1.8. Canonical Forms of Matrices

20

3. The *geometric multiplicity* γ of an eigenvalue λ of A is the maximum number of independent eigenvectors associated with it. In other words, the geometric multiplicity γ is the dimension of the eigenspace $\ker(A - \lambda I)$.
4. A matrix is *derogatory* if the geometric multiplicity of at least one of its eigenvalues is larger than one.
5. An eigenvalue is *semisimple* if its algebraic multiplicity is equal to its geometric multiplicity. An eigenvalue that is not semisimple is called *defective*.

Often, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($p \leq n$) are used to denote the *distinct* eigenvalues of A . It is easy to show that the characteristic polynomials of two similar matrices are identical; see Exercise 9. Therefore, the eigenvalues of two similar matrices are equal and so are their algebraic multiplicities. Moreover, if v is an eigenvector of B , then Xv is an eigenvector of A and, conversely, if y is an eigenvector of A , then $X^{-1}y$ is an eigenvector of B . As a result, the number of independent eigenvectors associated with a given eigenvalue is the same for two similar matrices; i.e., their geometric multiplicity is also the same.

1.8.1 Reduction to the Diagonal Form

The simplest form into which a matrix can be reduced is undoubtedly the diagonal form. Unfortunately, this reduction is not always possible. A matrix that can be reduced to the diagonal form is called *diagonalizable*. The following theorem characterizes such matrices.

Theorem 1.6. *A matrix of dimension n is diagonalizable iff it has n linearly independent eigenvectors.*

Proof. A matrix A is diagonalizable iff there exists a nonsingular matrix X and a diagonal matrix D such that $A = XDX^{-1}$ or, equivalently, $AX = XD$, where D is a diagonal matrix. This is equivalent to saying that n linearly independent vectors exist—the n column vectors of X —such that $Ax_i = d_i x_i$. Each of these column vectors is an eigenvector of A . \square

A matrix that is diagonalizable has only semisimple eigenvalues. Conversely, if all the eigenvalues of a matrix A are semisimple, then A has n eigenvectors. It can be easily shown that these eigenvectors are linearly independent; see Exercise 2. As a result, we have the following proposition.

Proposition 1.7. *A matrix is diagonalizable iff all its eigenvalues are semisimple.*

Since every simple eigenvalue is semisimple, an immediate corollary of the above result is as follows: When A has n distinct eigenvalues, then it is diagonalizable.

1.8.2 The Jordan Canonical Form

From the theoretical viewpoint, one of the most important canonical forms of matrices is the well-known Jordan form. A full development of the steps leading to the Jordan form is beyond the scope of this book. Only the main theorem is stated. Details, including the

$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$

$(\lambda - \lambda)^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$
 $6 = 9, 4$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow p_1 = 1$
 $\lambda_2 = 4 \Rightarrow p_2 = 1$
 $\dim S_{\lambda_1} = \{v = (x, y) : Av = \lambda v\}$
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

المادة السابعة:

الصفحة 12، 13 حذف

(الصفحة الرابعة عشر):

1.1. الذي يحال القانونية المصفوفات:

في هذا القسم سنتناول تحويل المصفوفات المربعة إلى مصفوفات مربعة أخرى
شكلاً كالمصفوفات القطرية، ثم نعالج القطر أو مثلثية.

تحويل المصفوفة (مصفوفتين) يعني تحويلها بطريقة التي التي للمصفوفة:

تعريف (1.5):

يقال عن مصفوفتين A و B أنهما متشابهتان إذا وجد للمصفوفة غير الشاذة X
مقدرة العلاقة:

$$A = X B X^{-1}$$

التي $A \rightarrow B$ يسمى كقولنا التماثل.

من الواضح أن التماثل هو علاقة متبادلة.

توليدات التماثل هي ما نطلق عليه التماثل للمصفوفة.

إن التماثل الثاني u_B للمصفوفة B يقوله إن شعاع ذاتي u_A للمصفوفة A من

هذه العلاقة $u_A = X u_B$

بالمختصر كقولنا التماثل هو لقيم التماثل للمصفوفة B عبارة جديدة.

نستخدم الآن بعض المصطلحات:

1. إن القيمة الذاتية λ تقدرية مميزة μ إذا كانت جزءاً للمعادلة المميزة

مكرراً μ مرة.

2. إذا كانت القيمة الذاتية تقدرية مميزة ما فوق الأول كمنه يقال عند

القيمة الذاتية الغير مكررة تدعى

مقدرة.

(الصفحة الخامسة عشر):

3. العدمية الهندسية ρ للقيمة الذاتية λ للمصفوفة A هي أكبر عدد صحيح

من الأربعة المستقلة خطياً المرتبة لهذه القيمة λ .

نلاحظ أيضاً أن العدمية الهندسية هي عدد أبعاد الصف $\ker(A - \lambda I)$

٤- تكون المصفوفة ناقصة إذا كانت القدرة الهندسية لعمق ذاتية واحدة
٣ الأقل أكبر من واحد.

٥- تكون العمق الذاتية لعمق بيعة إذا كانت عددية الكمية مادية
للعقدية الهندسية. إن العمق الذاتية التي لا تكون لعمق بيعة تكون
(ناقصة).

غالباً ما تستخدم المجموعة μ_1, \dots, μ_m للدلالة على العمق الذاتية
المقارنة (المختلفة) للمصفوفة A.

من أجل ارضاع أن الحدودية الميزة للمصفوفتان متساوية هي μ_1, \dots, μ_m
وهكذا، فإن لعمق الذاتية للمصفوفتان متساوية هي μ_1, \dots, μ_m وذلك
القدرة البديلة تكون ذاتية.

وأكثراً ذلك، إذا كان μ_1, \dots, μ_m متعامداً ذاتياً للمصفوفة B فإن μ_1, \dots, μ_m
سواء ذاتية للمصفوفة A وبالعكس، إذا كان μ_1, \dots, μ_m ذاتياً للمصفوفة A
فإن μ_1, \dots, μ_m هو سواء ذاتية للمصفوفة A.

ونتيجة لذلك، فإن عدد الاسعة الذاتية المستقلة هيياً المتعلقة لعمق
ذاتية معطاة هو ذاته بالبنية للمصفوفتين متساويتين.
توقع، إن بعد ذلك الهندسية تكون أيضاً ذاتية.

١.٨.١ : العقول الكاشفة القطرية

إن الخطر بشكل صلب للمصفوفة أن يحول إلى شكل غير متوازن هو
الشكل القطري.

لقد الخطر هنا العقول غير متوازن دائماً.

تدعى المصفوفة التي تكون كقولاً إلى مصفوفة قطرية بالمصفوفة العظيمة
إن النظرية التي تسمى مصفوفات كسبه.

نظرية ١.١.٦ :

تكون المصفوفة من بعد n قابلة للتفكير إذا وفقط إذا كانت تملك n سوية
ذاتياً مستقلة هيياً.

البرهان :

تكون المصفوفة A مقصورة (قابلة للتفكير) إذا وفقط إذا كانت تملك مصفوفة
عزيرة X ومصفوفة قطرية D قسمه $A = XDX^{-1}$ أو $A = XDX^{-1}$ أو $A = XDX^{-1}$.

هي D هي مصنفة قطرية

ان هذا يكفي قولا بان هناك ا سماعاً مستقلاً هيلاً ومنه لا يمكن

صياغة المصفوفة X الرئيسية : $AX_i = d_i X_i$

ان كل من هذه الـ D هي عبارة عن مجموعة ذاتية للمصفوفة A

ان المصفوفة القابلة للتقطر تلك فقط هي ذاتية

وبالعكس ان كانت هي القيم الذاتية للمصفوفة A فانه سيظهر

تكون A تلك ا سماعاً ذاتياً

نتعلم بسهولة بيان ان هذه الامثلة الذاتية تكون مستقلة هيلاً

كثيرة لدينا العينة التالية :

العينة 1.7 :

تكون المصفوفة قابلة للتقطر اذا وفقط اذا كانت جميع قيمها الذاتية

بديهية

بما ان كل قيمة ذاتية هي قيمة حقيقية فانها تكون لدينا

النمط المباشرة التالية :

عندما تكون المصفوفة A و D من القيم الذاتية المتعلقة عندنا تكون

المعادلة اعطاني

لكن A مصنفة هيرديتية الذاتية $P_A(x) = (x-1)^6 (x+2)(x-4)^3$

1 ان قيم المصفوفة هي 1, -2, 4

2 ان القيمة الجبرية للقيم الذاتية هي 1, -2, 4 (عدد الكلا 1, 2, 3)

3 ان المصفوفة A هي التي هي و (مجموع تاراجك القيم الذاتية)

4 ان الرباطات ان لـ D هي :

$a: M \geq 8$ $b: M < 8$ $c: M > 8$

هو M القدر الجبري

لا القدر الحقيقي

النتيجة المحاضرة الساعة