المحاضرة الثانية عشر :

مبرهنة : لتكن : G زمرة و A ، B زمر جزئية في G عندئذٍ :

1. إذا كان كلاً من : A ، B زمر جزئية ناظمية في G فإنَّ : $A.B$ زمرة جزئية ناظمية في G.
2. إذا كان كلاً من : A ، B زمر جزئية ناظمية وتبديلية ، وإذا كان : $A \cap B = \langle e \rangle$ عندئذٍ الزمرة $A.B$ تكون زمرة تبديلية .
3. إذا كانت A ناظمية ودوارة في G عندئذٍ أي زمرة جزئية في A تكون ناظمية في G .

الإثبات :

1) لنفرض أنَّ الزمر الجزئية A ، B ناظمية في G عندئذٍ $A.B$ زمرة جزئية في G ولنبرهن أنَّ :

$$\forall g \in G : g.(A.B).g^{-1} \subseteq A.B$$

لتكن : $x \in g.(A.B).g^{-1}$ عندئذٍ يوجد : $a \in A$ ، $b \in B$ بحيث :

$$x = g.(a.b).g^{-1}$$

$$x = g.a.e.b.g^{-1} = g.a.(g^{-1}.g).b.g^{-1}$$

$$= (g.a.g^{-1}).(g.b.g^{-1})$$

لكن كلاً من A ، B زمر جزئية ناظمية في G أي :

$$g.a.g^{-1} \in A \quad , \quad g.b.g^{-1} \in B$$

$$\Rightarrow x = (g.a.g^{-1}).(g.b.g^{-1}) \in A.B$$

$$\Rightarrow \boxed{g.(A.B).g^{-1} \subseteq A.B}$$

وهذا يبين لنا أنَّ الزمرة $A.B$ زمرة جزئية ناظمية في G

2) لنفرض أنَّ كلاً من A ، B زمرة ناظمية في G وتبديلية وأنَّ : $A \cap B = \langle e \rangle$ ولتكن : $a \in A$ ، $b \in B$ عندئذٍ :

$$a.b.a^{-1}.b^{-1} = \underbrace{(a.b.a^{-1})}_{\in B}.b^{-1} \in B.b^{-1} = B$$

ناظمية

$$a.b.a^{-1}.b^{-1}=a.\underbrace{(b.a^{-1}.b^{-1})}_{\in A\ \text{ناظمية}}\in a.A=A$$

. أصبح لدينا: $a.b.a^{-1}.b^{-1}\in A\cap B=\langle e\rangle$

$$\Rightarrow a.b.a^{-1}.b^{-1}=e$$

$$\Rightarrow \{a.b=b.a\}$$

3). لنفرض أنّ: $A=\langle a\rangle$ وأنّ: A ناظمية في G.

. لتكن T زمرة جزئية في A ولنبرهن على أنّ:

$$\forall g\in G:g.T.g^{-1}\subseteq T$$

. عندئذٍ: $T=\langle a^m\rangle$ حيث: m أصغر عدد صحيح للأمثلة: $a^m\in T$

. ليكن: $\underline{z\in g.T.g^{-1}}$ عندئذٍ: $z=g.x.g^{-1};x\in T$ ،

$$x=(a^m)^K\ ;K\in\mathbb{Z}$$

$$z=(g.a^m.g^{-1})^K=\underbrace{(g(a^m).g^{-1}).(g.(a^m).g^{-1}).\ldots\ldots.(g.(a^m).g^{-1})}_{K\ \text{مرة}}$$

. لكن نعلم أنّ: $g^{-1}.g=e$ ومنه سيكون: $(g.a^m.g^{-1})^K=g.(a^m)^K.g^{-1}$

$$\Rightarrow z=(g.a^K.g^{-1})^m=[\underbrace{(g.a.g^{-1})}_{\in A\ \text{ناظمية}}{}^K]^m=(a^s)^m=(a^m)^s\in T;s\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \underline{z\in T}\Rightarrow \boxed{g.T.g^{-1}\subseteq T}$$

زمرة الخارج:

مبرهنة: لتكن G زمرة، H زمرة جزئية ناظمية في G، ولنأخذ المجموعة: $G/H=\{a.H:\forall a\in G\}$

العملية (.) المعرفة على G/H بالشكل:

$$\forall a.H,b.H\in G/H;(a.H).(b.H)=(a.b).H\in G/H$$

عندئذٍ:

1). العملية (.) داخلية "عملية ثنائية مغلقة".

2). العملية معرفة جيداً.

3). العملية (.) تجميعية.

4) يوجد في G/H عنصر حايد هو H.

5) لكل عنصر $a.H \in G/H$ يوجد مقلوب هو: $\bar{a}^{1}.H$

6) المجموعة: $(G/H, .)$ زمرة.

الإثبات:

1) واضح لأنّ ناتج ضرب أي عنصرين من G/H هو عنصر من G/H.

2) ليكن: $a.H, a_1.H, b.H, b_1.H \in G/H$ بحيث:

$$a_1.H = b_1.H \quad , \quad a.H = b.H$$

• ولنثبت أنّ: $\{(a.H).(a_1.H) = (b.H).(b_1.H)\}$

• لدينا: $a \in b.H = a.H$ ومنه يوجد: $h_1 \in H$ بحيث: $a = b.h_1$

ولدينا: $a_1 \in b_1.H = a_1.H$ ومنه يوجد: $h_2 \in H$ بحيث: $a_1 = b_1.h_2$

$$(a.H).(a_1.H) = (a.a_1).H = [b.h_1.b_1.h_2).H = [(b.h_1.b_1).h_2].H$$
$$= (b.h_1.b_1).H.(h_2.H) = (b.h_1.b_1).H.H$$
$$= (b.h_1.b_1).H$$
$$= b.e.h_1.b_1.H = b.b_1.\underbrace{(b_1^{-1}.h_1.b_1)}_{\in H}.H$$
$$= b.b_1.H$$
$$= (b.H).(b_1.H)$$

$$\Longrightarrow \{(a.H).(a_1.H) = (b.H).(b_1.H)\}$$

3 + 4 + 5 + 6 وظيفة.

تمرين: لنأخذ في زمرة الأعداد الصحيحة الزمرة الجزئية: $4\mathbb{Z}$ تبديلية فهي ناظمية.

• بما أن: $\mathbb{Z}$ زمرة دوارة فكل زمرة جزئية منها تكون دوارة وناظمية أي: $4\mathbb{Z} = \langle 4 \rangle$ ناظمية ومنه زمرة الخارج $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ تكون موجودة ولكل عنصر من: $\mathbb{Z}$ توجد مرافقة.

$$\forall a \in \mathbb{Z} : a + 4\mathbb{Z}$$

$$4\mathbb{Z} = \{ \dots -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots \}$$

$$0 + 4\mathbb{Z} = \{ \dots -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots \}$$

$$1 + 4\mathbb{Z} = \{ \dots -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots \}$$

$$2 + 4\mathbb{Z} = \{ \dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 12, \dots \}$$

$$3 + 4\mathbb{Z} = \{ \dots, -9, -5, -1, 1, 5, 9, 11, \dots \}$$

$$4 + 4\mathbb{Z} = \{ \dots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, \dots \} = 4\mathbb{Z}$$

$\mathbb{Z}$ تبديلية ، $4\mathbb{Z}$ ناظمية ، لنفرض: $H = 4\mathbb{Z}$ فتكون مجموعة الخارج:

$$\mathbb{Z}/H = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = [4\mathbb{Z}, 1+4\mathbb{Z}, 2+4\mathbb{Z}, 3+4\mathbb{Z}]$$

وتكون زمرة الخارج: $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \circ)$ القانون المطبق هنا على النحو التالي:

$$(\forall a+4\mathbb{Z}, b+4\mathbb{Z} : (a+4\mathbb{Z}) \circ (b+4\mathbb{Z}) = (a \oplus b) + 4\mathbb{Z})$$

$\circ$	$4\mathbb{Z}$	$1+4\mathbb{Z}$	$2+4\mathbb{Z}$	$3+4\mathbb{Z}$
$4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}$	$1+4\mathbb{Z}$	$2+4\mathbb{Z}$	$3+4\mathbb{Z}$
$1+4\mathbb{Z}$	$1+4\mathbb{Z}$	$2+4\mathbb{Z}$	$3+4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}$
$2+4\mathbb{Z}$	$2+4\mathbb{Z}$	$3+4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}$	$1+4\mathbb{Z}$
$3+4\mathbb{Z}$	$3+4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}$	$1+4\mathbb{Z}$	$2+4\mathbb{Z}$

مثال: لنأخذ الزمرة: $\mathbb{Z}_{18}=\{0,1,2,\dots,17\}$ زمرة الجمع بالمقاس 18

ولنأخذ الزمرة: $H=\langle \frac{18}{3}\rangle=\langle 6\rangle$ زمرة جزئية في $\mathbb{Z}_{18}$ وهي زمرة جزئية دوارة ناظمية.

ملاحظة: $\mathbb{Z}_{18}$ مرتبتها 18 و $\langle 6\rangle$ مرتبتها 3 وبالتالي حسب لاغرانج يكون عدد المرافقات المختلفة يساوي:

$$(\mathbb{Z}_{18}:\langle 6\rangle)=\frac{(\mathbb{Z}_{18}:1)}{(\langle 6\rangle:1)}=\frac{18}{3}=6$$

$$0+H=H=6+H=12+H$$
$$1+H=7+H=13+H$$
$$2+H=8+H=14+H$$
$$3+H=9+H=15+H$$
$$4+H=10+H=16+H$$
$$5+H=11+H=17+H$$

وبالتالي تكون:

$$\frac{\mathbb{Z}_{18}}{H}=\{H,1+H,2+H,3+H,4+H,5+H\}$$

مبرهنة: لتكن G زمرة ولتكن $Z(G)$ زمرة جزئية ناظمية في G، إذا كانت زمرة الخارج: $G/Z(G)$ دوارة عندئذ تكون الزمرة G تبديلية.

الإثبات:

- لنفرض أن: $\frac{G}{Z(G)}=\langle g.Z(G)\rangle\ ;\ g\in G$
- ليكن: $x,y\in G$ عندئذ:

ومنه: $x.Z(G),\ y.Z(G)\in G/Z(G)$

$$x.Z(G)=(g.Z(G))^n=g^n.Z(G)$$
$$y.Z(G)=(g.Z(G))^m=g^m.Z(G)$$

$$x\in x.Z(G)=g^n.Z(G)\Rightarrow\{x=g^n.a\ ;\ a\in Z(G)\}$$
$$y\in y.Z(G)=g^m.Z(G)\Rightarrow\{y=g^m.b\ ;\ b\in Z(G)\}$$

$$x \cdot y = (g^n \cdot a) \cdot (g^m \cdot b) = g^n \cdot (a \cdot g^m) \cdot b = g^n (g^m \cdot a) \cdot b$$

$$\Rightarrow x \cdot y = g^{n+m} \cdot (a \cdot b) = g^{m+n} \cdot (a \cdot b)$$

$$= (g^m \cdot g^n) \cdot (a \cdot b)$$

$$= g^m \cdot (g^n \cdot a) \cdot b$$

$$= (g^m \cdot b) \cdot (g^n \cdot a)$$

$$= y \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot y = y \cdot x$$

ومنه: الزمرة G تبديلية

انتهت المحاضرة