تمارين : حل المعادلات التالية في $\mathbb{C}$ :

**1)** $z^6 - i = 0$

نفرض أن $z = r\,cis\,\theta$

$$\Rightarrow z^6 = i \Rightarrow (r\,cis\,\theta)^6 = cis\frac{\pi}{2}$$

$$r^6\,cis\,6\theta = cis\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^6 = 1 \Rightarrow r = 1 \\ 6\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi K \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}K \end{cases} \quad ; K = \{0,1,2,3,4,5\}$$

$K=0 \Rightarrow w_0 = cis\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

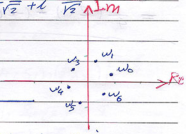
$K=1 \Rightarrow w_1 = cis\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$K=2 \Rightarrow w_2 = cis\frac{9\pi}{12} = cis\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$

$K=3 \Rightarrow w_3 = -w_0$

$K=4 \Rightarrow w_4 = -w_1$

$K=5 \Rightarrow w_5 = -w_2$

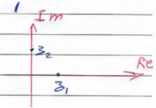



**2)** $z^2 - (1+i)z + i = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1+i)^2 - 4(i)(1) = 2i - 4i = -2i$$

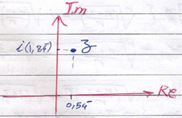
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-2i} = \sqrt{+2\,cis\frac{-\pi}{2}} = 1 - i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1+i+1-i}{2} = \frac{+2}{2} = 1 \\ z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+i-1+i}{2} = \frac{2i}{2} = i \end{cases}$$



3] $\ln(z-i)-i=0$

$e^{\ln(z-i)}=e^{i}$




$z-i=\text{cis}\,1$

$z-i=\cos(1)+i\sin(1)$

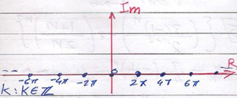
$z=\cos(1)+i(\sin(1)+1)$

4] $\cos z+i\sin z=1$

$\Rightarrow \text{cis}\,z=1$

$e^{iz}=e^{i0}$

$\Rightarrow z=0+2\pi k \Rightarrow z=2\pi k : k\in\mathbb{Z}$




تمرين: ادرس تقارب وتباعد المتتاليات العقدية التالية:

1] $\{e^{in\frac{\pi}{4}}\}$

$a=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$ متتالية هندسية أساسها

ونلاحظ أن $a\neq 1$ و $|a|=1$ فهي متباعدة

2] $\left\{\frac{e^{i}}{n+1}\right\}$

$\frac{|e^{i}|}{|n+1|}=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ومنه المتتالية متقاربة من الصفر

3] $\left\{\frac{\cos(ni)}{n}\right\}=\left\{\frac{e^{i(ni)}+e^{-i(ni)}}{2n}\right\}=\left\{\frac{e^{-n}+e^{n}}{2n}\right\}$

$a_n=\frac{e^{-n}+e^{n}}{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

نطبق أوبيتال

$\frac{-e^{-n}+e^{n}}{2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{e^{\infty}}{2}=\infty$

$\Leftarrow$ المتتالية متباعدة

4] $\left\{ \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n}\right)} + i\sqrt{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n} \right\} = \{z_n\}$

$x_n = \sqrt[n]{\frac{n+2}{n}} = \sqrt[n]{1+\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$y_n = \sqrt{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n} = \sqrt{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{e^2} = e$

$\Longrightarrow \{z_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1+ie$

5] $\left\{ \left(\frac{3(-1)^n}{2^{n+2}}\right) + i\left(\frac{1+n}{2n}\right)^n \right\}$

$x_n = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ هندسية

$y_n = \left(\frac{1+n}{2n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1+n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\cdot e = 0$

ومنه المتتالية متقاربة من الصفر.

6] $\left\{ \frac{n}{e^n} + i\,\frac{n}{\ln n} \right\}$

$y_n = \frac{n}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$\frac{1}{\frac{1}{n}} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ نستخدم أوبيتال

ومنه المتتالية متباعدة لأن قسمها التخيلي متباعد.

7] $\left\{ \frac{e^n \cdot \ln n}{n}\, i \right\}$

$y_n = \frac{e^n \ln n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\infty}{\infty}$

نستخدم أوبيتال

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^n}{1} = \infty$

ومنه

$\frac{e^n}{n} \cdot \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \cdot \infty = \infty$

ومنه المتتالية متباعدة.

8] $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$

متتالية متقاربة لأن:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$ متقاربة ومجموعها معلوم

ومنه حدها العام يسعى نحو الصفر فالمتتالية متقاربة من الصفر.

تمرين 3: ادرس تقارب وتباعد المتسلسلات العقدية التالية.

1] $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{i^n}{(n+1)^2}\right]$

$x_n = \frac{(-1)^n}{n!}$

متقاربة حسب لايبنتز لأنها متناقصة ومتناوبة وحدها العام يسعى نحو الصفر

$y_n = \frac{i^n}{(n+1)^2}$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n+1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{i}{2^2} + \frac{-1}{3^2} + \frac{-i}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{i}{6^2} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) + i\left(\frac{1}{2^2} + \frac{-1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2}$$

إن كلاً من $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2}$ ، $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ متقاربة حسب لايبنتز

لأنها متناوبة ومتناقصة و حدها العام يسعى نحو الصفر

ومنه $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{i^n}{(n+1)^2}\right]$ متقاربة.

2] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, 2^n}{n^n}$

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}\cdot 2\cdot \cancel{2^n}}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}\,\cancel{2^n}} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$P = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1$$

$\Leftarrow$ المتسلسلة متقاربة حسب دالامبير.

3] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (1+i)^n}{2^{n-2}}$

$$P = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{|1+i|^n}{2^n}} = (1)\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

⟸ المتسلسلة متقاربة حسب كوشي

4] $\sum_{n=\phi}^{\infty} \left(i + \frac{1}{i^n}\right)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(i + \left(\frac{1}{i}\right)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(i + (-i)^n\right)$$

$$= (i-i) + (i-1) + (i+i) + (i+1) + \cdots$$

$$= 4i + 4i + \cdots = \infty$$

⟸ المتسلسلة متباعدة

5] $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n!}{n+1}\right)^n$

$$\left(\frac{n!}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n ((n-1)!)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}\ \infty^{\infty} = \infty$$

⟸ المتسلسلة متباعدة

انتهت المحاضرة الخامسة والعشرون