رتل الانتظار المنتهي :

عادةً ما يكون رتل الانتظار محدوداً بسبب ضيق المكان ،
مثال على ذلك : رتل الانتظار في عيادة طبيب أو صالون حلاقة هو رتل انتظار محدود .

الدراسة النظرية :

لنفرض أن النظام يملك L زبون ، وسعة النظام L وحدة أيضاً .
في هذه الحالة سيتم رفض أي زبون قادم بسبب عدم وجود مكان للانتظار أو تأدية الخدمة
فإذا كان معدل الوصول λ ومعدل الخدمة u ، ونفرض لدينا قناة خدمة واحدة :

$$\lambda_0 = \lambda$$
$$\lambda_1 = \lambda \qquad\qquad u_n = u \quad \forall n$$
$$\vdots$$
$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{if } n \le L \\ 0 & \text{if } n > L \end{cases}$$

* احتمال وجود n زبون في النظام :

$$\boxed{P_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n P_0 & ; n \le L \\ 0 & ; n > L \end{cases}}$$

وبما أن المجموع الاحتمالي يساوي الواحد فإن :

$$\sum_{n=0}^{L} P_n = \sum_{n=0}^{L} \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n P_0 = 1 \Longrightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{L} \varrho^n}$$

لنناقش المقام : $\sum_{n=0}^{L} \varrho^n = 1 + \varrho + \varrho^2 + \cdots + \varrho^L$

هي متسلسلة هندسية حدها الأول (1) وأساسها ϱ ، عدد حدودها $L+1$:

$$\sum_{n=0}^{L} \varrho^n = \begin{cases} \frac{1-\varrho^{L+1}}{1-\varrho} & ; \varrho \ne 1 \\ L+1 & ; \varrho = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_0 = \begin{cases} \frac{1-\varrho}{1-\varrho^{L+1}} & ; \varrho \ne 1 \\ \frac{1}{L+1} & ; \varrho = 1 \end{cases}}$$

Scanned by CamScanner

/ /

ملاحظة: عملياً ربما تكون كثافة الازدحام ρ في حالات كثيرة أكبر من الواحد.
وإذا كانت $\rho \geq 1$ فإن النظام يحتاج إلى وقت طويل للوصول إلى نقطة الاستقرار.

* إن احتمال رفض زبون بسبب عدم وجود مكان يساوي احتمال وجود L زبون في النظام عند قدوم زبون جديد، أي هو الاحتمال P_L عندما $n = L$:

$$P_L = \begin{cases} \rho^L \left(\dfrac{1-\rho}{1+\rho^{L+1}} \right) & ; \rho \neq 1 \\ \dfrac{\rho^L}{L+1} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

* نحسب متوسط عدد الزبائن في النظام كما يلي:

$$L_s = \sum_{n=0}^{L} n \cdot P_n$$

$$L_s = \sum_{n=0}^{L} n \cdot \rho^n \cdot P_0 = P_0 \sum_{n=0}^{L} n \rho^n$$

$$\rho = 1 \Longrightarrow L_s = P_0 \sum_{n=0}^{L} n = \frac{1}{L+1} \cdot \frac{L(L+1)}{2} = \frac{L}{2}$$

$$\rho \neq 1 \Longrightarrow L_s = \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{L+1}} \right) \left[0 + \rho + 2\rho^2 + \cdots + L\rho^L \right]$$

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} \left(\frac{1-\rho^L}{1-\rho^{L+1}} \right) - \frac{L\rho^{L+1}}{1-\rho^{L+1}}$$

ملاحظة:

- نلاحظ أنه عندما تكون $\rho > 1$ فإن متوسط عدد الزبائن في النظام L_s يقترب من L وهذا يعني أن النظام يحوي L زبون وسطياً في لحظة زمنية ما.
- ولكن عندما تسعى ρ إلى قيمة صغيرة، وتسعى L إلى قيمة كبيرة، فإن متوسط عدد الزبائن في النظام يسعى إلى $L_s = \dfrac{\rho}{1-\rho}$

دار المسك

Scanned by CamScanner

/ /

مسألة:

في عيادة طبيب يصل المرضى حسب توزيع بواسون وبمعدل 12 مريض في الساعة علماً أن الوقت المستغرق لفحص المريض يتبع توزيعاً أسياً بمعدل 4 دقائق لكل مريض.
مع الملاحظة أن الطبيب لا يستطيع فحص أكثر من 40 مريض في اليوم الواحد.

المطلوب:

1) احسب العدد المتوقع للمرضى في العيادة.
2) احسب الزمن المتوقع في العيادة لكل مريض.

الحل:

$\lambda = 12$, $\mu = \frac{60}{4} = 15$, $L = 40$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \neq 1$$

1) العدد المتوقع للمرضى في العيادة:

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho}\left(\frac{1-\rho^{L}}{1-\rho^{L+1}}\right) - \frac{L\,\rho^{L+1}}{1-\rho^{L+1}}$$

$$L_s = \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}\left(\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{40}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{41}}\right) - \frac{40\left(\frac{4}{5}\right)^{41}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{41}} = 3.995$$

ولكن حسب الملاحظة الأخيرة لدينا $\rho < 1$ وبالتالي L_s يسعى إلى:

$$L_s \simeq \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = 4$$

ونلاحظ تقارب الجوابين.

2) الزمن المتوقع في العيادة لكل مريض:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{3.995}{12} = 0.33$$

مقدراً بالساعة.