I) $(p_1+p_2+\dots p_n)(m)$

$= p_1(m)+p_2(m)+\dots+p_n(m) \in \sum_{i=1}^{n} Imp_i$

أي أنّ $\boxed{M = \sum_{i=1}^{n} Imp_i}$

• كما أنه إذا كان $i \in \{1,\dots,n\}$ وكان

$x \in Imp_i \cap \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} Imp_j$

$$\begin{cases} x \in Imp_i \Rightarrow x = p_i(m) \\ x \in \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} Imp_j \Rightarrow x = \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} p_j(m) \end{cases}$$

$p_i(x) = p_i\left(\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} p_j(m)\right) = 0$

[illegible]

$p_i(p_i(m)) = 0 \Rightarrow p_i(m) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\boxed{Imp_i \cap \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} Imp_j = 0}$

إذن $M = \bigoplus_{i=1}^{n} Imp_i$

المحاضرة السادسة عشر

المودولات النوثرية.

تعريف.

ليكن M مودولاً على حلقة R، نقول عن M إنه يحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة إذا تحقق الشرط من أجل كل سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من M

$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots M_n \dots$

يوجد عدد طبيعي n بحيث

$M_k = M_n \ (\forall k \geq n)$

ونسمي عندئذٍ المودول M مودولاً نوثرياً

تعريف.

نقول عن مودول M إنه يحقق شرط الأعظمية إذا كان من أجل كل أسرة غير خالية من المودولات الجزئية $\Gamma = \{M_i\}_{i\in I}$ يوجد عنصر أعظمي في M (بالنسبة إلى علاقة الترتيب $\subseteq$ (الاحتواء))

مبرهنة.

إذا كان M مودولاً على حلقة R فإنّ القضيتين التاليتين متكافئتين

(I) M يحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة

(II) M يحقق شرط الأعظمية

الإثبات

$(I \Rightarrow II)$

لتكن $\Gamma = \{M_i\}_{i\in I}$ أسرة غير خالية من المودولات الجزئية من M

$\Gamma \neq \emptyset$ ليكن $M_0 \in \Gamma$

• إذا كان M_0 عنصراً أعظمياً يكون قد تم المطلوب

• إذا كان M_0 ليس أعظمياً فإنه يوجد $M_1 \in \Gamma$ بحيث $M_0 \subsetneq M_1$

• إذا كان M_1 عنصراً أعظمياً يكون قد تم المطلوب

• إذا كان M_1 ليس أعظمياً في Γ فإنه يوجد $M_2 \in \Gamma$ بحيث

$M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subset \dots$

$\Gamma = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$ عنصر أعظمي

$(A \subseteq B \Rightarrow A = B)$

وهكذا نحصل على سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية

$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$

وحسب (I) يوجد عدد طبيعي n بحيث

$M_n = M_K \quad \forall K \geq n$

أي M_n هو عنصر أعظمي في Γ.

$(II \Rightarrow I)$

لنفرض جدلاً أنّ M لا يحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة أي توجد سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية

$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$

غير منقطعة وعندئذ أسرة المودولات $\Gamma = \{M_i\}_{i \in I}$ لا تحوي عنصراً أعظمياً

نتائج وملاحظات.

1) كل مودول جزئي من مودول يحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة هو مودول يحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة.
أي كل مودول جزئي من مودول نيوثري هو مودول نيوثري.

2) كل مودول قسمة لمودول نيوثري هو مودول نيوثري.

مبرهنة.

إذا كان N مودولاً جزئياً من مودول M على حلقة R عندئذٍ إذا كان كل من N و M/N نيوثرياً فإن M نيوثري.

الإثبات.

ليكن $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$ (1)

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من M

عندئذٍ

$N \cap M_1 \subseteq N \cap M_2 \subseteq N \cap M_3 \subseteq \dots$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من N

وحسب الفرض (N نيوثري) فإنه يوجد $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث

$N \cap M_n = N \cap M_K \quad (\forall K \geq n)$ ... (2)

$\pi : M_i \longrightarrow M_i/N$

$\pi(M_1) \subseteq \pi(M_2) \subseteq \pi(M_3) \subseteq \dots$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من المودول M/N

يوجد عدد طبيعي m بحيث

$\pi(M_m) = \pi(M_K) \quad \forall K \geq n$ ... (3)

بفرض $p = \max(n, m)$ يكون

$$(4)\begin{cases} M_p \subseteq M_K \\ N \cap M_p = N \cap M_K & ; \forall K \geq p \\ \pi(M_p) = \pi(M_K) \end{cases}$$

لنبرهن أنّ السلسلة (1) منقطعة عند العدد الطبيعي (p).

$M_p = M_t \quad \forall t \geq p$

لدينا $M_p \subseteq M_t$ واضح من ترتيب السلسلة

كما أنه أياً كان $y \in M_t$ حسب (4)

يوجد $x \in M_p$ بحيث $\pi(x) = \pi(y)$

أي $x + N = y + N$

$y - x \in N$ (5)

وبما أنّ $x \in M_p \subseteq M_t$ فإن $x \in M_t$

وبالتالي $y - x \in M_t$ (6)

من (5) و (6) ينتج $y - x \in N \cap M_t \overset{(4)}{=} N \cap M_p$

$z = y - x \in M_p$

ومنه $y = \underbrace{z}_{\in M_p} + \underbrace{x}_{\in M_p} \in M_p$

أي $M_t \subseteq M_p$

ثانياً : المودولات الآرتينية

تعريف:

نقول عن مودول M على حلقة R إنه يحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة إذا كان من أجل كل سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية من M $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ يوجد عدد طبيعي n حيث $M_n = M_k \ ; \forall k \geq n$

عندئذٍ M مودول ارتيني.

تعريف:

نقول عن M إنه يحقق شرط الأصغرية إذا كان من أجل كل أسرة غير خالية $\Gamma = \{M_i\}_{i \in I}$ من المودولات الجزئية من M يوجد عنصر أصغري فيها.

مبرهنة (بدون برهان) تكافؤ:

(I) M يحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة

(II) M يحقق شرط الأصغرية

انتهت المحاضرة