$$g\circ\pi(p) = g(\pi(p)) = g(g_A^{-1}(p)) = p$$

إذن π هو تشاكل منشطر

ملاحظة.

$$0 \longrightarrow M \underset{p}{\overset{F}{\rightleftarrows}} N \underset{\pi}{\overset{g}{\rightleftarrows}} P \longrightarrow 0$$

$N = \underset{\cong M}{Imf} \oplus Kerp$ $\qquad$ $N = Kerg \oplus \underset{\cong P}{Im\pi}$

هل $N \cong M \oplus P$ ؟

المحاضرة الخامسة عشر

الإسقاط

تعاريف.

1) ليكن M_1, M_2 مودولين جزئيين من مودول M بحيث $M = M_1 \oplus M_2$ نسمي التشاكل

$$p: M \longrightarrow M$$

$$p(m = m_1 + m_2) = m_1$$

إسقاط لـ (M) على M_1 توازياً مع M_2

حيث $i, j \in \{1,2\}$ ، $i \neq j$

2) ليكن M مودولاً على حلقة R نقول عن

تشاكل $f: M \longrightarrow M$ دورة

أنه جامد إذا تحقق $f\circ f = f$

(لا ينتج من تركيب تشاكلات جزئية)

مبرهنة 1.

إذا كان f إسقاطاً على M_1 وكان $M = M_1 \oplus M_2$

توازياً مع M_2 فإن

1) $M_1 = Imf = \{x \in M ; f(x) = x\}$

2) $M_2 = Kerf$

3) f جامد

الإثبات.

1) واضح أن $M_1 = Imf$

كما أن $\{x \in M , f(x) = x\} \subseteq Imf = M_1$

من جهة أخرى أياً كان $m_1 \in M_1$ فإن

$m_1 = m_1 + 0$

$f(m_1) = f(m_1 + 0) = m_1$ لأن f إسقاط

أي أن $m_1 \in \{x \in M ; f(x) = x\}$

وهو المطلوب

2) أياً كان $m \in Kerf$

فإن $m = m_1 + m_2$

$m \in Kerf \Leftrightarrow f(m) = 0 \Leftrightarrow$

$m_1 = 0 \Leftrightarrow$ $\qquad$ f إسقاط

$m = m_2$

إذن $M_2 = Kerf$

وهو المطلوب

3) $\forall m \in M: f\circ f(m) = f(f(m)) \overset{(1)\text{من}}{=} f(m)$

وهو المطلوب.

مبرهنة (2).

إذا كان التشاكل $f: M \longrightarrow M$ جامداً فإن

f إسقاط على ~~[illegible]~~ M على ~~[illegible]~~

مودول جزئي توازياً مع الحد المكمل المباشر

له.

الإثبات.

نريد برهان أن $M = \underbrace{Imf}_{M_1} \oplus \underbrace{Kerf}_{M_2}$

$M_1 = Imf \quad , \quad M_2 = Kerf$

مودولين جزئيين من N وعندها إذا أثبتنا أن

$M = Imf \oplus Kerf$ نتم المطلوب

• أياً كان $m \in M$ فإن

$$m = \underbrace{f(m)}_{\in Imf} + \underbrace{m - f(m)}_{? \in Kerf}$$

إن $m - f(m) \in Kerf$ لأن

$$f(m - f(m)) = f(m) - f(f(m))$$

(جامد f)

$$= f(m) - f(m) = 0$$

$M = Imf + Kerf$ (1)

• ليكن $x \in Imf \cap Kerf$ فإن

$$\begin{cases} x \in Imf \Rightarrow x = f(m) \; ; \; m \in M \\ x \in Kerf \Rightarrow f(x) = 0 \end{cases}$$

ومنه

$$f(f(m)) = 0 \xrightarrow{\text{جامد}} f(m) = 0 \Rightarrow x = 0$$

أي $Imf \cap Kerf = 0$ (2)

من (1) و (2) نستنتج

$M = Imf \oplus Kerf$

وهذا يعني أن $f : M \to M$ إسقاطاً على $M_1 = Imf$ توازياً مع $M_2 = Kerf$

مبرهنة (3)

إذا كانت $(M_i)_{i \in I}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M فإن القضيتين التاليتين متكافئتان

(1) $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$

(2) يوجد تشاكلات $(p_i : M \to M_i)_{i=1..n}$ تحقق

(I) $p_1 + p_2 + \dots + p_n = I_M$

(II) $p_i \circ p_j = 0 \quad \forall i \neq j$

الإثبات

من $(1) \Rightarrow (2)$

بما أن $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ فإنه يوجد تشاكلات

$$p_i : M \longrightarrow M_i$$

$$p_i(x = x_1 + \dots + x_n) = x_i \quad \forall i = 1..n$$

وعندئذٍ يكون $(p_1 + \dots + p_n)(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{\text{بكتابة بشكل وحيد}} = x$$

أي (I) محققة

• أياً كان $i, j \in \{1, \dots, n\}$ و $i \neq j$

عندئذٍ $M = M_i \oplus \sum_{j=1, j \neq i}^{n} M_j$

ولكن p_i إسقاط على M_i توازياً مع $\sum_{j=1, j \neq i}^{n} M_j$

عندئذٍ

$$p_i \circ p_j(x) = p_i(p_j(x)) \in \vec{p_i}(Im\, p_j) \subseteq \vec{p_i}\Big(\sum_{j=1, j \neq i}^{n} p_j\Big) = \vec{p_i}(Ker\, p_i) = 0$$

إذن $p_i \circ p_j = 0$

من $(2) \Rightarrow (1)$

لنفرض أن (2) محققة ولنبرهن على أن M مجموع مباشر لمودولات جزئية منه

إن $Im\, p_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

مودولات جزئية من M ولنبرهن على أن

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} Im\, p_i$$

• أياً كان $m \in M$ فإن $m = I_M(m)$

I) $(P_1+P_2+\dots P_n)(m)$

$= P_1(m)+P_2(m)+\dots+P_n(m) \in \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\,P_i$

أي أن $M = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\,P_i$

• كما أنه إذا كان لكل $i \in \{1,\dots n\}$

$x \in \mathrm{Im}\,P_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \mathrm{Im}\,P_j$

$$\begin{cases} x \in \mathrm{Im}\,P_i \Rightarrow x = P_i(m) \\ x \in \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \mathrm{Im}\,P_j \Rightarrow x = \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} P_j(m) \end{cases}$$

$P_i(x) = P_i\left(\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} P_j(m)\right) = 0$

$P_i(P_i(m)) = 0 \Rightarrow P_i(m) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\mathrm{Im}\,P_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathrm{Im}\,P_j = 0$

إذن $M = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\,P_i$