التابع التحليلي:

نفرض أن $w=f(z)$ تابع عقدي قابل للاشتقاق في المنطقة D عندئذ نقول عن $f(z)$ أنه تحليلي في D.

ونقول عن $f(z)$ أنه تحليلي عند النقطة $z_0 \in D$ إذا كان تحليلي في جوار ما للنقطة z_0.

مبرهنة: نفرض أن $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابع تحليلي في المنطقة D عندئذ معادلتي كوشي ريمان محققتان:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

للحفظ

الإثبات: بما أن f تحليلي في المنطقة D فهو قابل للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط D ونفرض $z_0=x_0+iy_0$ عندئذ

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{[u(x,y)-u(x_0,y_0)]+i[v(x,y)-v(x_0,y_0)]}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$

وبما أن $f'(z_0)$ موجودة فهي موجودة على كل مسارات اقتراب z من z_0

لنأخذ المسار الموازي للمحور الحقيقي فهو يحقق $y=y_0$

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

ولنأخذ المسار الموازي للمحور الحقيقي فهو يحقق ~~$x=x$~~

$$f'(z_0)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

نطابق (1) مع (2)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$ #

مبرهنة: نفرض أن $u(x,y)$ ، $v(x,y)$ تابعان حقيقيان يملكان مشتقات جزئية مستمرة وتحقق معادلة كوشي ريمان عندئذ التابع $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابع قابل للاشتقاق ومشتقه يعطى بالعلاقة

$$\boxed{f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}}$$

للحفظ

الإثبات نضع

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)$$

$$= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y) + u(x, y+\Delta y) - u(x,y)$$

$$= \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x + \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta y}\Delta y$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$

بنفس الطريقة

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$$

ومنه

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x}(-\Delta y + i\Delta x)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x}i(i\Delta y + \Delta x)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \#$$

تمرين: أثبت أن الدالة $w = f(z) = z^2 + z$ تحليلية على كامل المستوي العقدي $\mathbb{C}$ وأوجد مشتقتها.

الحل نفرض $z = x + iy$

$$\Rightarrow f(z) = (x+iy)^2 + x + iy = x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy$$

$$= x^2 + y^2 + x + i(2xy + y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y)=x^2-y^2+x \\ v(x,y)=2xy+y \end{cases}$$

نلاحظ أن: $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+1=\frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

ومنه معادلتي كوشي ريمان محققتان على كامل المستوي العقدي فالتابع قابل للاشتقاق على $\mathbb{C}$ وبالتالي تحليلي على $\mathbb{C}$.
ومشتقه

$$f'(z)=(2x+1)+i(2y)$$
$$=2(x+iy)+1$$
$$=2z+1$$
#

تمرين: أثبت أن التابع $w=f(z)=\bar{z}^2$ غير تحليلي على $\mathbb{C}$ وغير تحليلي عند أي نقطة من $\mathbb{C}$.

الحل نفرض أن $z=x+iy \Rightarrow \bar{z}=x-iy$

$$f(z)=(x-iy)^2=\underbrace{x^2-y^2}_{u}+i(\underbrace{-2xy}_{v})$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=2x\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=-2x\end{aligned}\right] \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$$

كما أن $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ غير محققة إلا عندما $x=0$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=-2y\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=-2y\end{aligned}\right] \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$$

أي إن $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$ هي غير محققة إلا عندما $y=0$

وبالتالي قابل للاشتقاق فقط عند النقطة $z=0$ لكنه غير تحليلي بالنسبة لأي جوار لها وبالتالي غير تحليلي عند أي نقطة من $\mathbb{C}$ #

وظيفة: نفرض $w=f(z)=\bar{z}+|z|^2$
أثبت أن $f(z)$ غير تحليلي عند أي نقطة من نقاط $\mathbb{C}$.

انتهت المحاضرة العشرون

الحل / خاص: نفرض $z=x+iy$

$$w=f(z)=x-iy+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$
$$=\underbrace{x^2+x+y^2}_{u}+i\underbrace{(-y)}_{v}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=2x+1\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=-1\end{aligned}\right]\quad \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$$

نلاحظ أن $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ غير محققة إلا عندما $x=-1$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=2y\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=0\end{aligned}\right]\quad \frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$$

نلاحظ أن $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ غير محققة إلا عندما $y=0$

$\Leftarrow f(z)$ قابل للاشتقاق فقط عند $z=-1$
لكنه غير تحليلي بالنسبة لأي جوار لها
وبالتالي غير تحليلي عند أي نقطة من $\mathbb{C}$.

انتهت الوظيفة