The spectral radius and numerical radius are identical for normal matrices. It can also be easily shown (see Exercise 21) that $\nu(A) \geq \|A\|_2/2$, which means that

$$\frac{\|A\|_2}{2} \leq \nu(A) \leq \|A\|_2. \tag{1.34}$$

The numerical radius is a vector norm; i.e., it satisfies (1.8)–(1.10), but it is not consistent (see Exercise 22). However, it satisfies the power inequality (see [171, p. 333]):

$$\nu(A^k) \leq \nu(A)^k. \tag{1.35}$$

1.9.2 Hermitian Matrices

A first result on Hermitian matrices is the following.

Theorem 1.19. *The eigenvalues of a Hermitian matrix are real; i.e., $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Proof. Let λ be an eigenvalue of A and u an associated eigenvector or 2-norm unity. Then

$$\lambda = (Au, u) = (u, Au) = \overline{(Au, u)} = \bar{\lambda},$$

which is the stated result. □

It is not difficult to see that if, in addition, the matrix is real, then the eigenvectors can be chosen to be real; see Exercise 24. Since a Hermitian matrix is normal, the following is a consequence of Theorem 1.14.

Theorem 1.20. *Any Hermitian matrix is unitarily similar to a real diagonal matrix.*

In particular, a Hermitian matrix admits a set of orthonormal eigenvectors that form a basis of $\mathbb{C}^n$.

In the proof of Theorem 1.17 we used the fact that the inner products (Au, u) are real. Generally, it is clear that any Hermitian matrix is such that (Ax, x) is real for any vector $x \in \mathbb{C}^n$. It turns out that the converse is also true; i.e., it can be shown that if (Az, z) is real for all vectors z in $\mathbb{C}^n$, then the matrix A is Hermitian (see Exercise 15).

Eigenvalues of Hermitian matrices can be characterized by optimality properties of the Rayleigh quotients (1.32). The best known of these is the min-max principle. We now label all the eigenvalues of A in descending order:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

Here, the eigenvalues are not necessarily distinct and they are repeated, each according to its multiplicity. In the following theorem, known as the *min-max theorem*, S represents a generic subspace of $\mathbb{C}^n$.

Theorem 1.21. *The eigenvalues of a Hermitian matrix A are characterized by the relation*

$$\lambda_k = \min_{S,\ \dim(S)=n-k+1} \ \max_{x \in S,\, x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}. \tag{1.36}$$

Proof. Let $\{q_i\}_{i=1,\ldots,n}$ be an orthonormal basis of $\mathbb{C}^n$ consisting of eigenvectors of A associated with $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, respectively. Let S_k be the subspace spanned by the first k of these vectors and denote by $\mu(S)$ the maximum of $(Ax, x)/(x, x)$ over all nonzero vectors of a subspace S. Since the dimension of S_k is k, a well-known theorem of linear algebra shows that its intersection with any subspace S of dimension $n - k + 1$ is not reduced to $\{0\}$; i.e., there is a vector x in $S \bigcap S_k$. For this $x = \sum_{i=1}^{k} \xi_i q_i$, we have

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i |\xi_i|^2}{\sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2} \geq \lambda_k,$$

so that $\mu(S) \geq \lambda_k$.

Consider, on the other hand, the particular subspace S_0 of dimension $n - k + 1$ that is spanned by $q_k, \ldots, q_n$. For each vector x in this subspace, we have

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{\sum_{i=k}^{n} \lambda_i |\xi_i|^2}{\sum_{i=k}^{n} |\xi_i|^2} \leq \lambda_k,$$

so that $\mu(S_0) \leq \lambda_k$. In other words, as S runs over all the $(n - k + 1)$-dimensional subspaces, $\mu(S)$ is never less than λ_k and there is at least one subspace S_0 for which $\mu(S_0) \leq \lambda_k$. This shows the desired result. □

The above result is often called the Courant–Fisher min-max principle or theorem. As a particular case, the largest eigenvalue of A satisfies

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}. \tag{1.37}$$

Actually, there are four different ways of rewriting the above characterization. The second formulation is

$$\lambda_k = \max_{S,\, \dim(S)=k} \min_{x \in S, x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \tag{1.38}$$

and the two other ones can be obtained from (1.36) and (1.38) by simply relabeling the eigenvalues increasingly instead of decreasingly. Thus, with our labeling of the eigenvalues in descending order, (1.38) tells us that the smallest eigenvalue satisfies

$$\lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}, \tag{1.39}$$

with λ_n replaced by λ_1 if the eigenvalues are relabeled increasingly.

In order for all the eigenvalues of a Hermitian matrix to be positive, it is necessary and sufficient that

$$(Ax, x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad x \neq 0.$$

Such a matrix is called *positive definite*. A matrix that satisfies $(Ax, x) \geq 0$ for any x is said to be *positive semidefinite*. In particular, the matrix $A^H A$ is semipositive definite for any rectangular matrix, since

$$(A^H Ax, x) = (Ax, Ax) \geq 0 \quad \forall x$$

المحاضرة الحادية عشر.

« الصفحة 23 »:

1.5.2 المصفوفات الهرميتية:

أول نتيجة للمصفوفات الهرميتية هي التالية:

نظرية 1.19: هامة:

إن القيم الذاتية للمصفوفة الهرميتية هي أعداد حقيقية، أي $G(A) \subset \mathbb{R}$

البرهان:

لتكن λ قيمة ذاتية للمصفوفة A.

ولتكن u الشعاع الذاتي المرتبط بـ λ در النيم الثاني المساوي للواحد. حسب:

$$\lambda = (Au,u) = (u,Au) = \overline{(Au,u)} = \overline{\lambda}$$

والذي هو النتيجة المطلوبة.

ليس من الصعب أن نرى بالإضافة إلى كون المصفوفة حقيقية أن يمكن اختيار الأشعة الذاتية لتكون حقيقية.

بما أن المصفوفة الهرميتية قطرية فإن التالي هو عبارة عن نتيجة للحد الأعلى 1.14.

نظرية 1.20:

أي مصفوفة هرميتية شبه وسالبة هي مصفوفة قطرية حقيقية.

بشكل خاص إن المصفوفة الهرميتية تقبل مجموعة من الأشعة الذاتية المنظمة والتي تشكل قاعدة للفضاء $\mathbb{C}^n$.

في برهان النظرية 1.17 سمحنا الحقيقة أن الجداءات الداخلية (Au,u) هي حقيقية.

بشكل عام من الواضح أنه من أجل أي مصفوفة هرميتية فإن الجداء (Ax,x) يكون حقيقياً من أجل كل شعاع x من الفضاء $\mathbb{C}^n$.

ينتج من ذلك أن العكس أيضاً صحيح.

نتيجة: إذا كان ناتج الجداء (Ax,x) هو عدد حقيقي من أجل كل الأشعة x من الفضاء $\mathbb{C}^n$ عندها تكون المصفوفة A هرميتية.

إن القيم الذاتية للمصفوفة الهرميتية يمكن توصيفها من خلال الخواص المماثلة لنتيجة سنة رايلي 1.32.

إن أسهل حساب الأعظم و الأصغر،
نترتب الأعداد الذاتية للمصفوفة A في الترتيب التنازلي:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

هذه القيم الذاتية ليست بالضرورة أن تكون مختلفة بل إنها تكون مكررة
كل منها معتمدة على عدد دتها.
في المبرهنة التالية المعروفة ببرهنة الأعظم و الأصغر s تمثل فضاء جزئي
مولد من x.

نظرية 1.21:
إن القيم الذاتية للمصفوفة هرميتية A تتوصف من خلال العلاقة

$$\lambda_k = \min_{S, \dim(S)=n-k+1} \max_{x \in S, x \neq 0} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \qquad (1.36)$$

البرهان غير مطلوب.
(الصفحة 24) : «نظرية البرهان»
إن القيمة الذاتية غالباً ما تدعى بـ الأعظم و الأصغر دكوارنت - منش
كحالة خاصة. أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A كقيمة:

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \qquad (1.37)$$

في الحقيقة، هناك أربع طرق لإعادة كتابة التعابير السابقة. الصيغة الثانية
هي:

$$\lambda_k = \max_{S, \dim(S)=k} \min_{x \in S, x \neq 0} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \qquad (1.38)$$

و الطريقة الأخيرة تأتي كحل عليها من العلاقتين (1.38) و (1.36) من خلال
إعادة ترتيب القيم الذاتية تصاعدياً بدلاً من تنازلياً.
و هكذا بترتيبنا للقيم الذاتية تنازلياً، فإن العلاقة (1.38) تقترح لنا أن أصغر
قيمة ذاتية تحصر:

$$\lambda_n = \min \frac{(Ax,x)}{(y,x)} \qquad (1.39)$$

حيث ستبدل العبارة $A=A^H$ بالعبارة A إذا كانت المصفوفة المتناظرة مركبة فقط!
ولكي تكون جميع القيم الذاتية لمصفوفة هرميتية موجبة يلزم ويكفي أن تتحقق:

$$(AX,X) > 0 \quad \forall X \in \mathbb{C}^n, \ X \neq 0$$

مثل هذه المصفوفة تدعى مصفوفة موجبة.
المصفوفة التي تحقق $(AX,X) \geq 0$ من أجل أي عنصر X تسمى مصفوفة شبه موجبة.

حالة خاصة: المصفوفة A^HA هي دائماً مصفوفة موجبة من أجل أي مصفوفة مستطيلة A:

$$(A^HAX,X) = (AX,AX) \geq 0 \quad \forall X$$

الشرح بالتفصيل:

$$(AX,X) = X^TAX \geq 0 \quad \forall X \neq 0 \quad \text{positive semidfinite}$$
$$(AX,X) = X^TAX > 0 \quad \forall X \neq 0 \quad \text{positive dfinite}$$

إن (A^HA, AA^H) positive semidfinite

ملاحظة:

$(A^HA)^H = AA^H \neq A^HA$ لمصفوفة هرميتية.

- النهاية المحاضرة الحادية عشر -