Subject   التاريخ :

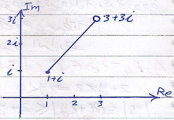
Date 2014/11/24   المحاضرة السابعة عشر   الموضوع :

تمرين: مثل هندسياً كلاً من المجموعات التالية في المستوي العقدي ثم ادرسها تبولوجياً

1] $A_1 = \{ z \in \mathbb{C} : 1 \leq Im(z) < 3 \ , \ |z-1| = |z-i| \}$

نفرض $z = x + iy$ عندئذ $1 \leq y < 3$ (I)

$|x+iy-1| = |x+iy-i|$



$\Rightarrow |(x-1)+iy| = |x+iy-i|$

$\Rightarrow |(x-1)+iy| = |x+(y-1)i|$

$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$

$\Rightarrow \cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1}$

$\Rightarrow x = y$ (II)

إذن A_1 هي تقاطع الشرطين (I) مع (II)

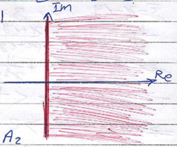
نلاحظ أن $A_1 = [1+i, 3+3i[$

A_1 مجموعة غير مفتوحة وغير مغلقة لأن النقطة $3+3i$ ملاصقة ولا تنتمي للمجموعة ومحدودة لأن $A_1 \subset D(0,5)$ ومترابطة لأنه يمكن الوصل بين أي نقطتين بخط مستقيم ومترابطة لأنها محدبة وليست منطقة لأنها ليست مفتوحة

2] $A_2 = \{ z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-1}{z-1}\right| \leq 1 \}$

نفرض $z = x+iy$ عندئذ

$$\left|\frac{z-1}{z-1}\right| = \left|\frac{x+iy-1}{x+iy-i}\right| = \frac{|(x-1)+iy|}{|(x+1)+iy|} \leq 1$$



$\Rightarrow |(x-1)+iy| \leq |(x+1)+iy|$

$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq (x+1)^2 + y^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq x^2 + 2x + 1 + y^2$

$\Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

A_2 هي مجموعة غير مفتوحة ومغلقة وغير محدودة ومترابطة ومحدبة وليست منطقة.

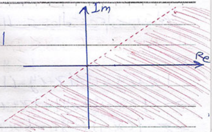
3] $A_3 = \{ z \in \mathbb{C} . \left|\frac{z-1}{z-i}\right| < 1 \}$

نفرض $z = x+iy$ عندئذ

$$\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = \left|\frac{x+iy-1}{x+iy-i}\right| = \left|\frac{(x-1)+iy}{x+(y-1)i}\right| < 1$$

Subject ______ التاريخ : ______

Date ______ الموضوع : ______



$\Rightarrow (x-1)^2+y^2<x^2+(y-1)^2$

$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2<x^2+y^2-2y+1$

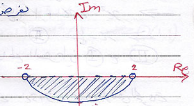
$\Rightarrow x>y$

A_3 هي مجموعة مفتوحة وغير مغلقة وغير محدودة

ومحدبة ومترابطة وهي منطقة

ومنطقة وحيدة الترابط.

4] $A_4=\{z\in\mathbb{C} : |z|\leq 2+Im(z)<2\}$



نفرض $z=x+iy$ عندئذ $2+y<2\Rightarrow y<0$

$|z|=|x+iy|\leq 2+y$

$x^2+\cancel{y^2}\leq 4+4y+\cancel{y^2}$

$\frac{x^2}{4}-1\leq y$

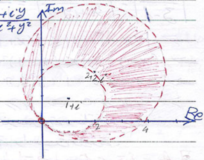
هي مجموعة غير مفتوحة وغير مغلقة ومحدودة

ومحدبة ومترابطة لكنها ليست منطقة

5] $A_5=\{z\in\mathbb{C} : \frac{1}{4}<Re\left(\frac{1}{z}\right)+Im\left(\frac{1}{z}\right)<\frac{1}{2}\}$

نفرض $z=x+iy$ فيكون $\bar{z}=x-iy$

$\frac{1}{z}=\frac{1}{x-iy}=\frac{x+iy}{(x+iy)}\frac{1}{(x-iy)}=\frac{x+iy}{x^2+y^2}$



$\Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{x+y}{x^2+y^2}<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 4>\frac{x^2+y^2}{x+y}>2$

$\Rightarrow 4(x+y)>x^2+y^2>2(x+y)$

لدينا $4x+4y>x^2+y^2$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-4y+4<8$ (نتمم طريق كامل)

$\Rightarrow \boxed{(x-2)^2+(y-2)^2<8}$

$$x^2+y^2 > 2x+2y$$ ولدينا

$$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1>2$$

$$\Rightarrow \boxed{(x-1)^2+(y-1)^2 >} 2$$

$\Leftarrow A_5$ هي مجموعة مفتوحة وغير مغلقة ومحدودة وغير محدبة ومترابطة ومنطقة ووحيدة الترابط.

$A_6=\{z\in\mathbb{C}: |z-1|+|z+1|=4\}$

نفرض $z=x+iy$

$$|(x-1)+yi|+|(x+1)+yi|=4$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=4$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2+2\sqrt{((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)}=16$$

$$x^2+1-\cancel{2x}+y^2+x^2+\cancel{2x}+1+y^2+2\sqrt{(x^2-2x+1+y^2)(x^2+2x+1+y^2)}=16$$

$$2x^2+2y^2+2$$
$$+2\sqrt{x^4+\cancel{2x^3}+x^2+x^2y^2-\cancel{2x^3}-4x^2-\cancel{2x}-\cancel{2xy^2}+x^2+\cancel{2x}+1+y^2+y^2x^2+y^2x^2+\cancel{2y^2x}+y^2+y^4}$$
$$=16$$

$$x^2+y^2+1+\sqrt{x^4-2x^2+2x^2y^2+1+2y^2+y^4}=8$$

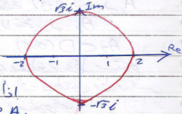
$$-\sqrt{x^4+y^4-2x^2+2x^2y^2+2y^2+1}=x^2+y^2-7$$

نربع $\Rightarrow \cancel{x^4}+\cancel{y^4}-2x^2+\cancel{2x^2y^2}+2y^2+1=\cancel{x^4}+\cancel{y^4}+\cancel{2x^2y^2}-14x^2-14y^2+49$

$$12x^2+16y^2=48$$

$$\frac{x^2}{\frac{48}{12}}+\frac{y^2}{\frac{48}{16}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$



إذاً A_6 هو مجموعة نقط القطع الناقص

A_6 هي مجموعة غير مفتوحة ومغلقة ومحدودة وغير محدبة ومترابطة وليست منطقة.

وظيفة

$A_1=\{z\in\mathbb{C}: |z-\frac{1}{2}|\leq |1-\frac{1}{2}\bar{z}|\}$

$A_2=D(3+2i,1)\cup[3+i,3+2i]$

ملاحظة في القطع الناقص البعد الثابت أكبر من مجموع بعد النقطة عن المرتكز

انتهت المحاضرة السابعة عشر 77

Subject ____________ التاريخ :

Date ____________ الموضوع :

الحل خاص

نفرض

1] $A_1=\{z\in\mathbb{C}: |z-\frac{1}{2}|<|1-\frac{1}{2}\bar{z}|\}$

$z=x+iy$

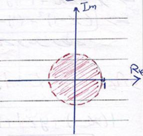
$|(x-\frac{1}{2})+iy|<|1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y|$

$x^2-\cancel{x}+\frac{1}{4}y^2<1-x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2$

$x^2+\frac{1}{4}+y^2-1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}y^2<0$

$\Longrightarrow \frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}y^2\leq 0$

$x^2+y^2<1$



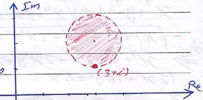
ا) A_1 مفتوحة لأنه $\forall a\in A_1 : \exists D(a;\varepsilon)\subset A_1$

وغير مغلقة لأنها لا تحوي أي نقطة ملاصقة

ومحدودة لأن $A_1\subset D(0,2)$

ومحدبة لأنه يمكن الوصل بين أي نقطتين بخط مستقيم، مترابطة لأنها محدبة، منطقة وحيدة الترابط

2] $A_2=D(3+2i,1)\cup[3+i,3+i]$



المجموعة A_2 ليست مفتوحة لأن النقطة $3+i$ ليست داخلية

وغير مغلقة لأن النقطة $3+3i$ تنتمي لـ $\bar{A}_2$ ولا تنتمي لـ A_2

ومحدودة لأن $A_2\subset D(0,6)$

محدبة لأنه يمكن الوصل بين أي نقطتين بخط مستقيم

ومترابطة لأنه يمكن الوصل بين أي نقطتين بخط منكسر

وليست منطقة لأنها ليست مفتوحة.

انتهاء حل الوظيفة