خفض مرتبة المعادلة التفاضلية:

إذا كان y_1 حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة:

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = 0 \quad \text{--- (1)}$$

فإن التحويل من y إلى u المعطى بالعلاقة $y = y_1 \int u\, dx$ أو $\left(\frac{y}{y_1}\right)' = u$

يفيد هذا التحويل بخفض رتبة المعادلة التفاضلية (1) درجة واحدة

وبالمحافظة على خطية المعادلة التفاضلية.

y_1 حل خاص للمعادلة لا علاقة له بالصفر (لا يساوي الصفر)

هذا التحويل يمكن أن يجزأ على مرحلتين:

أ: $y \to Z$ على الشكل التالي:

$$y = y_1 . Z$$

$$y' = y_1' . Z + y_1 . Z'$$

$$y'' = y_1'' . Z + y_1' Z' + y_1' . Z' + y_1 . Z''$$

$$y'' = y_1'' Z + 2 y_1' Z' + y_1 . Z'' = y_1 Z'' + 2 y_1' Z' + y_1'' Z$$

$\vdots$

نلاحظ أن المشتق من المرتبة K $\boxed{y^{(K)}}$ هو عبارة خطية من الشكل $Z, Z', Z'', \dots, Z^{(K)}$ وبالتالي نتيجة التبديل في المعادلة (1) نحصل على معادلة تفاضلية خطية متجانسة بالنسبة لـ $Z, Z', Z'', \dots, Z^{(K)}$

أي من الشكل

$$y_1 Z^{(n)} + q_1(x)\, Z^{(n-1)} + \dots + q_{n-1}(x)\, Z' + q_n(x)\, Z = 0$$

حيث أن

$$q_n(x) = y_1^{(n)} + P_1(x)\, y_1^{(n-1)} + \dots + P_n(x)\, y_1$$

بما أن y_1 حلاً خاصاً للمعادلة (1) فإن $q_n(x) = 0$ ومنه

هو تعويض المعادلة

$$y_1(x)\, Z^{(n)} + q_1(x)\, Z^{(n-1)} + \dots + q_{n-1}(x)\, Z' = 0$$

نلاحظ أن هذه المعادلة لا تحوي Z بشكل واضح لهالعضو رتبها ... [illegible]

$Z' = u$

وهو ... المعادلة

ب : $Z' = u$

ثالثاً: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$xy'' - xy' + y = 0 \quad \text{(خطي متجانس)}$$

الحل: نلاحظ أن

[illegible]

ملاحظة أن $\boxed{y_1 = x} \Rightarrow y = y_1 \int u \cdot dx = x \int u\, dx$

y_1

نعرف ... [illegible]

$$y = y_1 . Z \Rightarrow y = x . Z$$

نشتق ثم نعوض بالمعادلة التفاضلية

$$y' = Z + xZ'$$

$$y'' = Z' + Z' + xZ''$$

$$y'' = xZ'' + 2Z'$$

نعوض في المعادلة التفاضلية

$$x(xZ'' + 2Z') - x(Z + xZ') + xZ = 0$$

$$x^2 Z'' + 2xZ' - xZ - x^2 Z' + xZ = 0$$

$$x^2 Z'' + 2xZ' - x^2 Z' = 0$$

$$x^2 Z'' + (2-x)xZ' = 0$$

التحويل الثاني نفرض $Z' = u$ فنجد أن

$$Z'' = u'$$

نعوض بالمعادلة

$$\boxed{x^2 u' + (2-x)xu = 0}$$ معادلة تفاضلية ذات متحولات قابلة للفصل

نفصل ثم نكمل الحل.

وظائف :

① $y'' = y + 1$

② أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية إذا علمت أنها تقبل حلولاً خاصة من الشكل $y = e^{ax}$

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

③ أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

علماً أنها تقبل حلين خاصين من الشكل

$$y_1 = x \quad , \quad y_2 = e^x$$

المعادلات الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة :

متجانسة لعدم وجود حد حر

الشكل العام لهذا النوع من المعادلات التفاضلية ذات الأمثال الثابتة هو

① --- $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$

حيث $a_0 , a_1 , \dots , a_n$ (ثوابت) أعداد حقيقية

نفرض الحل الخاص على الشكل

إن الحلول الخاصة للمعادلة ① يمكن إيجادها من الشكل $\boxed{y = e^{\lambda x}}$ حيث $\lambda \neq 0$

مجهول ومطلوب إيجاده. للاشتقاق نشتق مرات متتالية

بالاشتقاق :

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \; , \; y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \; , \; \dots \; , \; y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

نعوض في المعادلة ① :

$$a_0 \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + a_2 \lambda^{n-2} e^{\lambda x} + \dots + a_n e^{\lambda x} = 0$$

نقسم على $e^{\lambda x} \neq 0$ فنحصل على المعادلة التالية ⟸

② --- $F(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$

معادلة جبرية من الدرجة n

تسمى هذه المعادلة ② بالمعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية الخطية ①.

فلها حلول n جذر ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$)

ومعادلة من درجة ثانية لها جذور، الآن في الجذور

نميز عدة حالات: (1) جميع جذور هذه المعادلة (المعادلة المميزة بـ λ) مختلفة في هذه الحالة نحصل على n جذر حقيقي مختلف وبالتالي إذا كانت هذه الجذور $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ نحصل على n حلول خاصة من الشكل

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \quad \dots, \quad y_n = e^{\lambda_n x}$$

وهي [illegible]

الحل العام:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

مع $C_1, C_2, \dots, C_n$ ثوابت اختيارية

مثال:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$ (معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة)

نفرض $y = e^{\lambda x}$ حل خاص نشتق ونعوض

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 3\lambda e^{\lambda x} + 2 e^{\lambda x} = 0$$

نقسم ع $e^{\lambda x} \neq 0$

$$\boxed{\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0}$$ المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 2$$

جذور حقيقية مختلفة

$$\boxed{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}}$$ الحل العام

مثال: أوجد الحل العام

$$y''' - y' = 0$$

/ /

بفرض $y=e^{\lambda x}$ حل خاص

$y' = \lambda e^{\lambda x}$

$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

بالتعويض بالمعادلة $y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}$

$\lambda^3 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} = 0$

نقسم على $e^{\lambda x} \neq 0$

$\Leftarrow$

المعادلة المميزة $\boxed{\lambda^3 - \lambda = 0}$

$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$

$\lambda = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \ , \ \lambda = -1$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1 \quad , \lambda_3 = -1$

الحل العام $\boxed{y = c_1 + c_2 e^{x} - c_3 e^{-x}}$

2) جميع الجذور مختلفة إلا أنه بعضها (مركب) كعقدي (للمعادلة المميزة) بالتالي نلاحظ

أنه إذا كان $\lambda = a + ib \Leftarrow \bar{\lambda} = a - ib$ مرافق العدد الأول

لنفرض أن $\lambda_1 = a + ib$ أحد الجذور العقدية (مركبة) للمعادلة المميزة

وأن $\lambda_2 = a - ib$ هو الجذر الآخر المرافق للجذر الأول في هذه الحالة:

$e^{\lambda x} = y_1 = e^{(a+ib)x} \quad , \quad e^{\bar{\lambda} x} = y_2 = e^{(a-ib)x}$

نعلم أن

علاقة أولر

$e^{ib} = \cos b + i \sin b$

$e^{-ib} = \cos b - i \sin b$

ومنه $e^{ib} = \cos b + i \sin b$ ،

$y_1 = e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$

$y_2 = e^{(a-ib)x} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$

مثال: $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0$

الحل

$$y = e^{\lambda x}$$

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

نعوض بالمعادلة $\quad y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}$

$$\lambda^3 e^{\lambda x} - 3\lambda^2 e^{\lambda x} + 7\lambda e^{\lambda x} - 5 e^{\lambda x} = 0$$

$$\div\ e^{\lambda x} \neq 0$$

المعادلة المميزة $\quad \lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 = 0$

أحد الجذور $\lambda = 1$

$$\begin{array}{r|l} & \lambda^2 - 2\lambda + 5 \\ \hline \lambda - 1 & \lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 \\ & \mp\lambda^3 \pm \lambda^2 \\ \hline & -2\lambda^2 + 7\lambda - 5 \\ & \pm 2\lambda^2 \mp 2\lambda \\ \hline & 5\lambda - 5 \\ & \mp 5\lambda \pm 5 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(5) = -16 < 0$

حقيقي $\quad \boxed{\lambda_1 = 1}$ $\qquad$ مركبتي عام

$$\lambda_2 = \sqrt{-16} = 4i = 1 \mp 2i$$

$\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_2 = 1 + 2i} \quad , \quad \boxed{\lambda_3 = 1 - 2i}$

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x}$$

ونعوض