مسألة استثمار حقل نفط:

تقوم شركة باستثمار حقل نفط لمدة n سنة حيث كمية النفط الموجودة في البئر هي V
وليكن $P_t(x)$ هو الربح في السنة t حيث x كمية النفط المستخرج في هذه السنة.
يمكن في كل سنة استخراج نصف كمية النفط المتبقية في الحقل فقط.
ويتم بيع كمية النفط المتبقية في السنة $n+1$ بمبلغ قدره k للوحدة الواحدة من النفط.
المطلوب تحديد كمية النفط المستخرجة في كل سنة لتحقيق أكبر ربح ممكن.

* كتابة النموذج الديناميكي لهذه المسألة:

سوف نختار النموذج التراجعي لحل المسألة لأن تحديد الحالة الابتدائية على أنها الربح في السنة $n+1$ أسهل كون المقدار k موجود، ولكن يمكن الحل باستخدام النموذج التقدمي.
لنعرف التابع $F(t, v)$ الذي يعبّر عن أكبر ربح مستقبلي إذا كنا في بداية السنة t حيث v كمية النفط المتبقية في حقل النفط.

فإن النموذج الديناميكي هو:

$$F(t,v) = \max_{0 \le x \le \frac{v}{2}} \{P_t(x) + F(t+1, v-x)\}$$

والحالة الابتدائية: $F(n+1, \alpha) = P_{n+1}(\alpha) = \alpha k$

المطلوب إيجاد $F(1, V)$.

مثال: ليكن عدد سنوات الاستثمار هو 3، وكمية النفط في الحقل $V = 4$.
الربح في السنة الأولى 10 ألف ل.س للوحدة الواحدة.
الربح في السنة الثانية 12 ألف ل.س للوحدة الواحدة.
الربح في السنة الثالثة 11 ألف ل.س للوحدة الواحدة،
ويتم بيع كمية النفط المتبقية في السنة الرابعة بـ 5 آلاف ل.س للوحدة الواحدة.
أوجد الحل الأمثل.

الحل:

$P_1(x) = 10x \quad , \quad P_2(x) = 12x \quad , \quad P_3(x) = 11x$

$P_4(x) = kx = 5x$

المطلوب إيجاد $F(1,4)$.

/ /

$$F(1,4) = \underset{0 \le x \le \frac{4}{2}}{Max} \{10x + F(2, 4-x)\}$$

$$F(1,4) = Max \{0 + F(2,4), 10 + F(2,3), 20 + F(2,2)\}$$

لتسهيل الحساب نشكل الجدول التالي:

كمية النفط المستخرجة لتحقيق ذلك	الربح المستقبلي إذا كنا في بداية السنة t	الحسابات
$0 \le x \le 4$	$5x$	$F(4,x) = 5 * x$
2	32	$F(3,4) = \underset{0 \le x \le 2}{Max} \{0+20, 11+15, \underline{22+10}\} = 32$
1	21	$F(3,3) = \underset{0 \le x \le 3/2}{Max} \{0+15, \underline{11+10}\} = 21$
1	16	$F(3,2) = \underset{0 \le x \le 1}{Max} \{0+10, \underline{11+5}\} = 16$
0	5	$F(3,1) = \underset{0 \le x \le 1/2}{Max} \{0+\underline{5}\} = 5$
0	0	$F(3,0) = \underset{0 \le x \le 0}{Max} \{0+\underline{0}\} = 0$
2	40	$F(2,4) = \underset{0 \le x \le 2}{Max} \{0+32, 12+21, \underline{24+16}\} = 40$
1	28	$F(2,3) = \underset{0 \le x \le 3/2}{Max} \{0+21, \underline{12+16}\} = 28$
1	17	$F(2,2) = \underset{0 \le x \le 1}{Max} \{0+16, \underline{12+5}\} = 17$
0	40	$F(1,4) = \underset{0 \le x \le 2}{Max} \{\underline{0+40}, 10+28, 20+17\} = 40$

الحل الأمثل: الربح الأعظمي للمسألة 40 ألف ل.س.

يجب استخراج 0 وحدة في السنة الأولى

يجب استخراج 2 وحدة في السنة الثانية

يجب استخراج 1 وحدة في السنة الثالثة.

والباقي للمستثمر الجديد 1 وحدة.

مسألة ضخ الغاز وإضافة الماء لاستخراج النفط :

عادةً ما يكون الضغط الناتج عن ضخ الغاز غير كافٍ لاستخراج النفط ، لذلك تتم إضافة كمية من الماء إلى بئر النفط لجعل الضغط مناسباً .

ولكن في هذه الحالة عند ضخ الغاز سنستخرج نفطاً وماءً بنفس الوقت .

ولذلك فإنه من المنطقي أن تكون كمية الماء المستخرجة أصغر أو تساوي كمية الماء المضخوخة .

تُجرى العديد من الدراسات المعقّدة التي تنتج عنها المعطيات التالية :

$q_t(x)$ = كمية النفط المستخرج من البئر t إذا كانت كمية الغاز المضخوخ هي x .

$w_t(x)$ = كمية الماء المستخرج من البئر t إذا كانت كمية الغاز المضخوخ هي x .

- نفرض b كمية الغاز المتوفرة لدينا .

ونفرض W كمية الماء المسموح بها . (المسموح بضخها) .

ونفرض لدينا n بئر نفط .

فما هي كمية الغاز التي يجب ضخها في كل بئر لتحقيق الحصول على أكبر كمية من النفط ؟

* كتابة النموذج الديناميكي للمسألة :

سنختار النموذج التقدمي ، لنعرف التابع $F(t,\beta,v)$ الذي يدل على أكبر كمية نفط مستخرجة في الآبار من 1 وحتى t إذا كانت كمية الغاز المتوفرة هي β وكمية الماء المسموح بها هي v .

فإن النموذج الديناميكي هو :

$$F(t,\beta,v) = \max_{\substack{0 \le x \le \beta \\ w_t(x) \le v}} \{ q_t(x) + F(t-1, \beta - x, v - w_t(x)) \}$$

الحالة الابتدائية :

$$F(1,\beta,v) = \max_{\substack{0 \le x \le \beta \\ w_1(x) \le v}} \{ q_1(x) \}$$

والمطلوب حساب : $F(n,b,W)$

مثال: بفرض لدينا ثلاثة آبار، وكمية الغاز المسموح بها $b = 4$
وكمية الماء المسموح بها $W = 2$ وليكن الجدول المعطى التالي:

كمية الغاز المضخوخ / الآبار		0		1		2		3		4	
q_1	w_1	0	0	2	1	3	2	4	2	4	2
q_2	w_2	0	0	1	1	3	1	4	1	4	1
q_3	w_3	0	0	2	1	3	1	4	1	5	2

الحل:

المطلوب حساب: $F(3,4,2) = ?$

$$F(3,4,2) = \underset{\substack{0 \le x \le 4 \\ w_3(x) \le 2}}{Max} \{ q_3(0) + F(2,4,2),\ q_3(1) + F(2,3,1),\ q_3(2) + F(2,2,1),\ q_3(3) + F(2,1,1),\ q_3(4) + F(2,0,0) \}$$

لتسهيل الحساب نشكل جدولاً نحسب فيه كل المقادير المطلوبة.

ملاحظة:

$$F(1,3,1) = \underset{\substack{0 \le x \le 3 \\ w_1(x) \le 1}}{Max} \{ q_1(0),\ q_1(1) \} = Max\{0, 2\} = 2$$

لأنه على الرغم من أن كمية الغاز المضخوخ x يمكن أن تكون 0 أو 1 أو 2 أو 3
ولكن الشرط الثاني $w_1(x) \le 1$ غير محقق في الجدول إلا عندما تكون $x = 0, 1$
لذا لا نأخذ سوى هاتين القيمتين.
أي أن الشرطين معاً يجب أن يتحققا.
وبنفس الطريقة نحصل على الجدول التالي:

	الحسابات	أكبر كمية نفط مستخرجة من الآبار من 1 حتى t	كمية الغاز المضخوخة في البئر t في هذه الحالة
$F(1,4,2)$	$= \underset{\substack{0 \le x \le 4 \\ w_1(x) \le 2}}{Max} \{q_1(0), q_1(1), q_1(2), q_1(3), q_1(4)\} = Max\{0,2,3,4,4\} = 4$	4	3 أو 4
$F(1,3,1)$	$= \underset{\substack{0 \le x \le 3 \\ w_1(x) \le 1}}{Max} \{q_1(0), q_1(1)\} = Max\{0,2\} = 2$	2	1
$F(1,2,1)$	$= \underset{\substack{0 \le x \le 2 \\ w_1(x) \le 1}}{Max} \{q_1(0), q_1(1)\} = Max\{0,2\} = 2$	2	1
$F(1,1,1)$	$= \underset{\substack{0 \le x \le 1 \\ w_1(x) \le 1}}{Max} \{q_1(0), q_1(1)\} = Max\{0,2\} = 2$	2	1
$F(1,2,0)$	$= \underset{\substack{0 \le x \le 2 \\ w_1(x) \le 0}}{Max} \{q_1(0)\} = 0$	0	0
$F(1,0,1)$	$= \underset{\substack{0 \le x \le 0 \\ w_1(x) \le 1}}{Max} \{q_1(0)\} = 0$	0	0
$F(1,0,0)$	$= \underset{\substack{0 \le x \le 0 \\ w_1(x) \le 0}}{Max} \{q_1(0)\} = 0$	0	0
$F(1,1,0)$	$= \underset{\substack{0 \le x \le 1 \\ w_1(x) \le 0}}{Max} \{q_1(0)\} = 0$	0	0
$F(2,4,2)$	$= \underset{\substack{0 \le x \le 4 \\ w_2(x) \le 2}}{Max} \{q_2(0)+F(1,4,2), q_2(1)+F(1,3,1), q_2(2)+F(1,2,1), q_2(3)+F(1,1,1), q_2(4)+F(1,0,1)\}$ $= Max\{0+4, 1+2, 3+2, 4+2, 4+0\} = 6$	6	3
$F(2,3,1)$	$= \underset{\substack{0 \le x \le 3 \\ w_2(x) \le 1}}{Max} \{q_2(0)+F(1,3,1), q_2(1)+F(1,2,0), q_2(2)+F(1,1,0), q_2(3)+F(1,0,0)\}$ $= Max\{0+2, 1+0, 3+0, 4+0\} = 4$	4	3

/ /

$F(2,2,1)$	$= \underset{\substack{0\le x\le 2 \\ w_1(x)\le 1}}{Max}\{q_2(0)+F(1,2,1),\ q_2(1)+F(1,1,0),\ q_2(2)+F(1,0,0)\}$ $= Max\{2,1,\underline{3}\} = 3$	3	2
$F(2,1,1)$	$= \underset{\substack{0\le x\le 1 \\ w_1(x)\le 1}}{Max}\{q_2(0)+F(1,1,1),\ q_2(1)+F(1,0,0)\}$ $= Max\{\underline{2},1\} = 2$	2	0
$F(2,0,0)$	$= \underset{\substack{0\le x\le 1 \\ w_2(x)\le 0}}{Max}\{q_2(0)+F(1,0,0)\} = 0$	0	0
$F(3,4,2)$	$= Max\{0+6,\ 2+4,\ 3+3,\ 4+2,\ 5+0\}$ $= Max\{\underline{6},\ \underline{6},\ \underline{6},\ \underline{6},\ 5\} = 6$	6	0 أو 1 أو 2 أو 3

الكمية العظمى المسحوبة من الآبار الثلاثة هي 6 ونلاحظ أنه لدينا أربعة حلول مثلى:

ضخ 0 وحدة في البئر الثالث
ضخ 3 وحدة في البئر الثاني
ضخ 1 وحدة في البئر الأول

ضخ 1 وحدة في البئر الثالث
ضخ 3 وحدة في البئر الثاني
ضخ 0 وحدة في البئر الأول

ضخ 2 وحدة في البئر الثالث
ضخ 2 وحدة في البئر الثاني
ضخ 0 وحدة في البئر الأول

ضخ 3 وحدة في البئر الثالث
ضخ 0 وحدة في البئر الثاني
ضخ 1 وحدة في البئر الأول