SUBJECT:

المحاضرة العشرون

المودولات الإسقاطية

المودولات الأفقية:

نعلم أنه من أجل أي تشاكل مودولي

$f: A \to A'$ يوجد تشاكل زمري (Z-مودول)

$f_*: Hom(M, A) \to Hom(M, A')$

M مودول على R ; $f_*(v) = f \circ v$

تعريف:

ليكن P مودولاً على حلقة R

نقول عن المودول P إنه إسقاطي إذا كان

من أجل كل متتالية تامة

$$A \xrightarrow{g} A' \to 0$$

يكون التشاكل

$$g_*: Hom(P,A) \to Hom(P,A')$$

غامراً.

مبرهنة:

إذا كان P مودولاً على حلقة R فإن P

إسقاطي إذا وفقط إذا من أجل كل مخطط

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

يوجد تشاكل مودولي $v: P \to A$

يجعل المخطط تبادلياً.

الإثبات:

لنفرض أولاً أن P إسقاطي ولنبرهن على أنه

من أجل أي مخطط من الشكل

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ تامة

يوجد تشاكل مودولي $v: P \to A$ يحقق

$$g \circ v = f$$

بما أن P إسقاطي فإن التشاكل

$g_*: Hom(P,A) \to Hom(P,B)$ غامر

أي من أجل $f \in Hom(P,B)$ يوجد تشاكل

مودولي $v: P \to A$ يحقق

$$g_*(v) = f$$

أي $g \circ v = f$

وبالعكس:

لنفرض أنه من أجل أي مخطط

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "v"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ تامة

يوجد تشاكل مودولي $v: P \to A$

يحقق $g \circ v = f$

ولنبرهن على أن P إسقاطي أي لنبرهن على

أن التشاكل

غامر $g_*: Hom(P,A) \to Hom(P,B)$

$$g_*(v) = g \circ v$$

$f \in Hom(P,B)$ يوجد تشاكل مودولي

$v \in Hom(P,A)$ بحيث $g \circ v = f$

أي $g_*(v) = f$

وهذا يثبت أن g_* غامر

مبرهنة.

كل مودول حر هو مودول إسقاطي.

الإثبات.

ليكن p مودولاً حراً قاعدته S

ولنبرهن من أجل أي مخطط

$$\begin{tikzcd} & p\,(x_i) \arrow[dl, dashed, "v"'] \arrow[d, "f"] & \\ A\,(a_i) \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ تامة

يوجد تشاكل مودولي $v : p \to A$

يحقق $g \circ v = f$

$x_i \in S$ يوجد $a_i \in A$

حيث $f(x_i) = g(a_i)$ (لأن g غامر)

وبما أن S قاعدة لـ p فإنه $x \in p : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

ولنأخذ العلاقة $v : p \to A$

$v(x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

كما أن v يحقق شرط التشاكل المودولي.

أياً كان $\alpha \in R$, $x, y \in p$

فإن $v(\alpha x + y) = v(\alpha . \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i)$

$= v(\sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i + \beta_i) x_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i + \beta_i) a_i$

$= \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i$

$= \alpha v(x) + v(y)$

كما أنه أياً كان $x \in p$ فإن

$g \circ v(x) = g(v(x)) = g(v(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i))$

$= g(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(a_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$

$= f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = f(x)$

مبرهنة.

إذا كان p مودولاً على حلقة R فإن القضايا التالية متكافئة.

1) p إسقاطي

2) كل متتالية تامة $M \to p \to 0$ تكون منشطرة

3) p هو مكمل مباشر لمودول حر

الإثبات.

$(1 \Rightarrow 2)$

$M \xrightarrow{g} p \to 0$ تامة

ولنبرهن على وجود تشاكل مودولي

$\pi : p \to M$

يحقق $g \circ \pi = I_p$

بما أن p إسقاطي (الفرض) فإنه من المخطط

$$\begin{tikzcd} & p \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "I_p"] & \\ M \arrow[r, "g"] & p \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ (تامة)

يوجد تشاكل مودولي $\pi : p \to M$

يحقق $g \circ \pi = I$

أي π هو تشاكل منشطر

$2 \Rightarrow 3$

F المودول الحر المبتذل الذي قاعدته P

عندئذٍ

تباين قانوني

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} g \xrightarrow{J} F \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

محدد مطابق

هي منشطرة $F = P \oplus \operatorname{Ker} g$

إذ..

تشاكل منشطر

$$F \underset{\pi}{\overset{g}{\rightleftarrows}} P \longrightarrow 0$$

غامر

حسب المبرهنة متتالية تامة هي منشطرة ونعلم

حسب مبرهنة سابقة $F = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im}\pi$

وبما أن π متباين $\operatorname{Im}\pi \simeq P$

$3 \Rightarrow 1$

بما أن P جمع مكمل مباشر في مودول حر F

فإنه يوجد مودول جزئي X في F بحيث

$$F = P \oplus X$$

ولنأخذ المخطط

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

تامة I

ولنبرهن على وجود التشاكل

$\nu : P \to A$

يحقق. $g \circ \nu = f$

• وبما أن F حر فهو إسقاطي وبالتالي من

أجل المخطط

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "d"] & \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(تامة)

يوجد تشاكل مودولي $\psi : F \to A$

يحقق. $g \circ \psi = d$

عندئذٍ يكون $\psi_P = \nu : P \to A$ تشاكل مودولي

$$d_P = f$$

$$g \circ \psi = d$$

$$\Rightarrow (g \circ \psi)_P = d_P$$

$$\Rightarrow g \circ \nu = f$$