

**المحاضرة العشرون**

المودولات الإسقاطية  
المودولات الأفقية

يوجد تشاكل مودولي  $A \rightarrow P \xrightarrow{v} A$  تحقق  
 $gov = f$

بما أن  $P$  إسقاطي فإن التشاكل

$g_* : \text{Hom}(P, A) \rightarrow \text{Hom}(P, B)$

أي من أجل  $f \in \text{Hom}(P, B)$  يوجد تشاكل

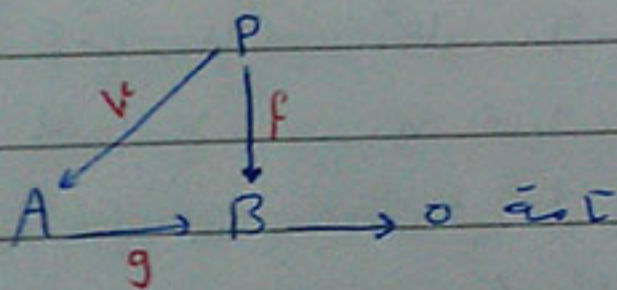
مودولي  $A \rightarrow P \xrightarrow{v}$  تحقق

$g_*(v) = f$

$gov = f$  أي

وبالعكس.

لتفرض انصاف أي تحفظ



تامة

يوجد تشاكل مودولي  $A \rightarrow P \xrightarrow{v}$  تحقق  
 $gov = f$

ولنبرهن على أن  $P$  إسقاطي أي لنبرهن على  
أن التشاكل

$g_* : \text{Hom}(P, A) \rightarrow \text{Hom}(P, B)$

$g_*(v) = gov$

$f \in \text{Hom}(P, B)$  يوجد تشاكل مودولي

$v \in \text{Hom}(P, A)$  حيث  $gov = f$

$g_*(v) = f$  أي

وهذا يثبت ان  $g$  عامر

نعلم أنه من أجل أي تشاكل مودولي

$f : A \rightarrow \bar{A}$  يوجد تشاكل مودولي

$f_* : \text{Hom}(M, A) \rightarrow \text{Hom}(M, \bar{A})$

$M$  مودول على  $R$  ،  $f_*(v) = fov$

**تعريف**

ليكن  $P$  مودولاً على حلقة  $R$

نقول عن المودول  $P$  انصاف إسقاطي إذا كان  
من أجل كل متتالية تامة

$A \xrightarrow{g} \bar{A} \rightarrow 0$

يكون التشاكل

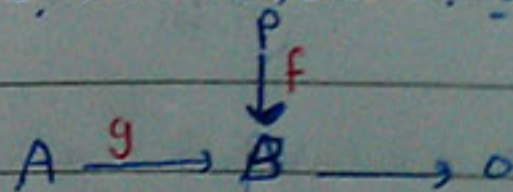
$g_* : \text{Hom}(P, A) \rightarrow \text{Hom}(P, \bar{A})$

عامراً

**مبرهنة**

إذا كان  $P$  مودولاً على حلقة  $R$  فإن  $P$

إسقاطي إذا وفقط إذا من أجل كل تحفظ



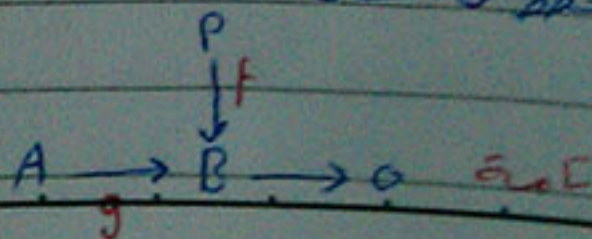
يوجد تشاكل مودولي

يحل المحفظ بتبادلياً

**الإثبات**

لتفرض أولاً أن  $P$  إسقاطي ولنبرهن على أنه

من أجل أي تحفظ من الشكل



كما أنه أيضاً كان  $x \in P$  فإن  
 $g \circ v(x) = g(v(x)) = g(v(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i))$

$$= g(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g(a_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

$$= f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = f(x)$$

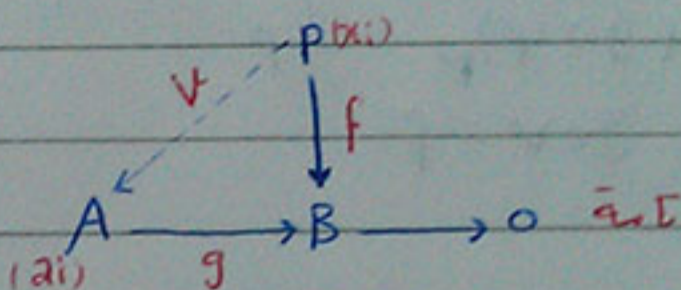
مبرهنة

مبرهنة

كل مودول حر هو مودول إسقاطي

الإثبات

ليكن  $P$  مودولاً حراً قاعدته  $S$   
 ولنبرهن من أجل أي منظم



إذا كان  $P$  مودولاً على حلقة  $R$  فإن لقضاي  
 التالية متكافئة

يوجد  $\hat{\cdot}$  اكل مودولي  $v: P \rightarrow A$   
 تحقق  $g \circ v = f$

(1) إسقاطي

$a_i \in A$  يوجد  $x_i \in S$

(2) كل متتالية تامة  $M \rightarrow P \rightarrow 0$  تكون منشطة

حيث  $f(x_i) = g(a_i)$  (لأن  $g$  تامة)

(3)  $P$  هو ما قبل مباشر لمودول حر

حيث  $x \in P : x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  بعد أن نقاسم في  $P$  فإنه

الإثبات

لنأخذ العلاقة  $v: P \rightarrow A$

(1  $\Rightarrow$  2)

$$v(x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v(x_i)$$

كما أن  $v$  تحقق شرط التماثل المودولي

$$M \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

ولنبرهن على وجود  $\hat{\cdot}$  اكل مودولي

أي كان  $\alpha \in R, x, y \in P$

$$\pi: P \rightarrow M$$

$$g \circ \pi = I_P$$

بما أن  $P$  إسقاطي (الفرض) فإنه من المنظم

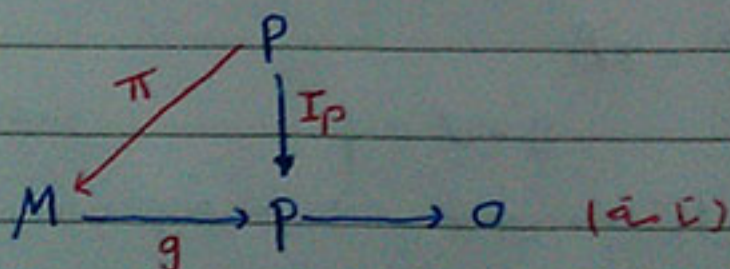
$$v(\alpha x + y) = v(\alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i)$$

$$= v(\sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i + \beta_i) x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i + \beta_i) v(x_i)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i v(x_i) + \sum_{i=1}^n \beta_i v(x_i)$$

$$= \alpha v(x) + v(y)$$



يوجد  $\hat{\cdot}$  اكل مودولي  $\pi: P \rightarrow M$

$$g \circ \pi = I$$

أي  $\pi$  هو  $\hat{\cdot}$  اكل منظم

يوجد  $\psi: F \rightarrow A$  اكل مودولي

تحقق  $g \circ \psi = \text{id}$

عندئذ يكون  $\psi_p = \nu: p \rightarrow A$  اكل مودولي

$\text{id}_p = f$

$g \circ \psi = \text{id}$

$\Rightarrow (g \circ \psi)_p = \text{id}_p$

$\Rightarrow g \circ \nu = f$

2  $\Rightarrow$  3

F المودول الحر المبني الذي قاعدته P

عندئذ

تباين تانزي

$$0 \rightarrow \text{Ker } g \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

مورد مطابق

من منظر  $F = p \oplus \text{Ker } g$

$\pi$  اكل منظر

$$F \xrightarrow{\pi} P \rightarrow 0$$

حسب الفرض متساوية تمامه مني منظره ونعلم

بمبرهنة سابقة  $F = \text{Ker } g \oplus \text{Im } \pi$

بما ان  $\pi$  متباين  $\text{Im } \pi \cong p$

3  $\Rightarrow$  1

بما ان P اكل مودول مباشر في مودول F

فانه يوجد مودول جزئي X في F بحيث

$F = p \oplus X$

ولناخذ المخطط

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow f & \\ A & \xrightarrow{g} & B \rightarrow 0 \end{array}$$

ولنرهن على وجود اكل

$\nu: p \rightarrow A$

تحقق  $g \circ \nu = f$

وبما ان F اكل مودول مباشر وبالتالي بين

اهل المخطط

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \downarrow \text{id} & \\ A & \xrightarrow{g} & B \rightarrow 0 \end{array}$$