ثانياً طريقة تايلور

نفرض أن $f(x,y)$ معادلة تفاضلية مزودة بشرط ابتدائي

ونفرض $y(x_0)=y_0$

$x_{i+1}-x_i=h \quad : i=0,1,2,\dots$

عندئذ يكون منشور تايلور للتابع $y=y(x)$ على الشكل التالي:

$$\boxed{y(x+h)=y(x)+\frac{h}{1!}y'(x)+\frac{h^2}{2!}y''(x)+\frac{h^3}{3!}y'''(x)+\dots}$$

للحفظ

نفرض $x=x_0$ فنحصل على $y_1=y(x)$

ثم نفرض $x=x_1$ فنحصل على $y_2=y(x_2)$ ثم . . .

تمرين (1): باستخدام طريقة تايلور أوجد حل تقريبي للمعادلة التفاضلية $y'=x.y$ حيث $y(0)=1$; $h=0.1$ في $[0,0.2]$ مستخدماً أربع حدود من حدود منشور تايلور

الحل: نلاحظ أن منشور تايلور بأربع حدود يعطى بـ

$$y(x+h)=y(x)+h\,y'(x)+\frac{h^2}{2}y''(x)+\frac{h^3}{6}y'''(x)$$

حيث
$\Leftarrow \quad y'=x.y$

$\Leftarrow \quad y''=y+xy'=y+x^2y$

$\Leftarrow \quad y'''=y'+2xy+x^2y'$

$$\boxed{\begin{aligned}y'&=x.y\\ y''&=y+x^2y\\ y'''&=3xy+x^3y\end{aligned}}$$

التاريخ:

الموضوع:

$$(x_0, y_0) = (0, 1)$$

$$y_1 = y(x_1) = y(0.1) = y(x_0) + h\,y'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + \frac{h^3}{6} y'''(x_0)$$

$$y'(x_0) = 0$$

$$y''(x_0) = 1 + 0 = 1$$

$$y'''(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1 = 1 + 0 + \frac{(0.1)^2}{2}(1) + (0) = 1.005}$$

$$\Rightarrow \boxed{(x_1, y_1) = (0.1\ ,\ 1.005)}$$

$$y_2 = y(x_2) = y(0.2) = y(x_1) + h\,y'(x_1) + \frac{h^2}{2} y''(x_1) + \frac{h^3}{6} y'''(x_1)$$

$$y'(x_1) = 0.1005$$

$$y''(x_1) = 1.005 + (0.1)^2(1.005) = 1.015$$

$$y'''(x_1) = 3(0.1)(1.005) + (0.1)^3(1.005) = 0.3025$$

$$y_2 = 1.005 + (0.1)(0.1005) + \frac{(0.1)^2}{2}(1.015)$$

$$+\frac{(0.1)^3}{6}(0.3025) = 1.0201$$

ومنه

x	0	0.1	0.2
y	1	1.005	1.0201

تمرين (2): باستخدام طريقة تايلور أوجد حل تقريبي للمعادلة التفاضلية $y' = x - y$ حيث $y(0) = 0$; $h = 0.25$ في $[0, 1]$ مستخدماً ثلاث حدود من حدود منشور تايلور

الحل: نلاحظ أن منشور تايلور بثلاث حدود

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x)$$

$$y(0) = 0 \Longrightarrow (x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$y_1 = y(x_0) + h\,y'(x_0) + \frac{h^2}{2}y''(x_0)$$

$$y_1 = 0 + (0.25)(0) + \frac{(0.25)^2}{2}(1)$$

$$y_1 = y(x_1) = 0.0312$$

$$(x_1, y_1) = (0.25, 0.0312)$$

$$y' = x - y$$
$$y'' = 1 - y'$$
$$= 1 - (x - y)$$
$$= 1 - x + y$$

$$y_2 = y(x_2) = y(x_1) + h\,y'(x_1) + \frac{h^2}{2}y''(x_1)$$

$$= 0.0312 + (0.25)(0.2188) + \frac{(0.25)^2}{2}(0.7812)$$

$$= 0.1103 \Rightarrow (x_2, y_2) = (0.5, 0.1103)$$

$$y_3 = y(x_3) = y(x_2) + h y'(x_2) + \frac{h^2}{2} y''(x_2)$$

$$= (0.1103) + (0.25)(0.3897) + \frac{(0.25)^2}{2}(0.6103)$$

$$y_3 = 0.2267 \Rightarrow (x_3, y_3) = (0.75, 0.2267)$$

$$y_4 = y(x_4) = y(x_3) + h y'(x_3) + \frac{h^2}{2} y''(x_3)$$

$$= (0.2267) + (0.25)(0.5233) + \frac{(0.25)^2}{2}(0.4767)$$

$$y_4 = 0.3724 \Rightarrow (x_4, y_4) = (1, 0.3724)$$

x	0	0.25	0.5	0.75
y	0	0.0312	0.1163	0.2267

وظيفة: $y' = \frac{x-y}{2}$ حيث $y(0) = 1$

$h = 0.25$ في $[0, 0.5]$ حتى أربع حدود من منشور تايلور وأيضاً بالطريقة المباشرة

حل الوظيفة: نلاحظ أن منشور تايلو بأربع حدود

$$y(x+h) = y(x) + h y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x)$$

$(x_0, y_0) = (0, 1)$

لدينا

$y' = \frac{x-y}{2}$

$y'' = \frac{1}{4}(2-x+y)$

$y''' = \frac{1}{8}(-2+x-y)$

$$y(0+0.25) = y(x_0) + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + \frac{h^3}{6} y'''(x_0)$$

$$y(0.25) = 1 + (0.25)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{(0.25)^2}{2}\left(\frac{1}{4}(2+1)\right) + \frac{(0.25)^3}{6}\left(\frac{1}{8}(-2-1)\right)$$

$y(0.25) = 0.8974$

$(x_1, y_1) = (0.25, 0.8974)$

$$y(x_1+h) = y(0.5) = y(x_1) + h y'(x_1) + \frac{h^2}{2} y''(x_1) + \frac{h^3}{6} y'''(x_1)$$

$y(0.5) = 0.8362$

$(x_2, y_2) = (0.5, 0.8362)$

x	0	0.25	0.5
y	1	0.8974	0.8362