* يمكن حساب عدد الوحدات المتوقعة في النظام من العلاقة التالية :

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t)$$

$$\Longrightarrow L = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-u)\, u^n = (1-u) \sum_{n=0}^{\infty} n\, u^n$$

ولكن $1 > u = \frac{\lambda}{\mu}$ عندئذٍ تصبح المتسلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, u^n = u + 2u^2 + 3u^3 + \cdots = \frac{u}{(1-u)^2}$$

$$\Longrightarrow L = (1-u) \cdot \frac{u}{(1-u)^2} = \frac{u}{1-u}$$

$$\Longrightarrow L = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\mu-\lambda}{\mu}} \Longrightarrow \boxed{L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}}$$

* الوقت المستغرق في النظام :

$$W = \frac{L}{\lambda} \Longrightarrow \boxed{W = \frac{1}{\mu-\lambda}}$$

* عدد الوحدات (الزبائن) المتوقعة في رتل الانتظار :

$$L_q = \frac{\lambda}{\mu} L \Longrightarrow \boxed{L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}}$$

* الوقت المتوقع (المستغرق) في رتل الانتظار :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \Longrightarrow \boxed{W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}}$$

/ /

مثال:

لدى أحد مكاتب خدمة الهاتف خط خارجي واحد.
يصل المستفيدون إلى مكتب الخدمة عشوائياً، وبمتوسط 8 دقائق بين مستفيد وآخر
الوقت المستهلك لإجراء مكالمة هاتفية يقع بمتوسط 5 دقائق، ويتبع توزيعاً أسياً.
المطلوب: 1) ماهو احتمال أن يكون الخط مشغولاً؟
2) ماهو متوسط عدد الزبائن (طول) رتل الانتظار؟

الحل: كل 8 دقائق يصل زبون وبشكل عشوائي $\Longleftarrow$ $\lambda = \frac{1}{8}$

تنتهي فترة استخدام خط الهاتف بعد 5 دقائق فيكون معدل الخدمة $u = \frac{1}{5}$

1) احتمال أن يكون الخط مشغولاً:

$$\rho = \frac{\lambda}{u} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{5}} \Longrightarrow \rho = \frac{5}{8}$$

2) متوسط رتل الانتظار:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{u(u-\lambda)} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)}$$

$$\Longrightarrow L_q = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{25}-\frac{1}{40}} = \frac{1}{64} \cdot \frac{200}{3} = \frac{25}{24}$$

إذن فالعدد المتوقع في رتل الانتظار يساوي تقريباً الواحد

مثال:

لدينا رحبة لإصلاح السيارات، ولدى دراسة آلية عمل هذه الرحبة تبين أن الزبائن تصل إلى الرحبة بمعدل سيارتين كل ساعة وفق توزيع بواسون (الوصول عشوائي)
وتبين أن متوسط الخدمة في هذه الرحبة تقريباً 20 دقيقة لتقديم الخدمة المطلوبة للزبون علماً أن الخدمة في هذه الرحبة تتبع توزيعاً أسياً.

المطلوب:
1) احسب متوسط عدد السيارات المتوقفة في الرحبة.
2) احسب متوسط الوقت المستغرق في الرحبة لكل سيارة.

/ /

3) احسب متوسط طول رتل الانتظار.
4) احسب الكلفة الكلية للانتظار في الرحبة خلال 8 ساعات.
علماً أن تكلفة انتظار السيارة الواحدة هي 200 ليرة في الساعة الواحدة.

الحل:

$$\lambda = 2 \quad , \quad \mu = \frac{60}{20} = 3$$

1) عدد السيارات المتوقفة في الرحبة:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3-2} = 2$$

2) متوسط الوقت المستغرق لكل سيارة في الرحبة:

$$w = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3-2} = 1$$

3) متوسط طول رتل الانتظار:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$L_q = \frac{4}{3(3-2)} = \frac{4}{3}$$

4) الكلفة الكلية للانتظار في الرحبة خلال 8 ساعات يعطى بما يلي:
عدد السيارات الكلية في الرحبة X وقت انتظار كل سيارة X عدد الساعات X تكلفة الانتظار.

$$c = L \times W_q \times 8 \times 200$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2}{3(3-2)} = \frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow c = 2 \times \frac{2}{3} \times 8 \times 200 = 2133$$

/ /

2 مناقشة النمط الثاني: عدة قنوات خدمة.

لهذا النوع من النظم تطبيقات عديدة، ومثل هذه المراكز يمكن تصنيفها إلى نوعين:

1) مراكز خدمة تكون زبائنها غير محددة المصدر مثل محطة وقود أو سوق تجاري

2) مراكز خدمة تكون زبائنها محددة المصدر مثل خطوط الإنتاج في مصنع كبير.

وسندرس الحالة الأولى لمراكز الخدمة ذات الزبائن غير محددة المصدر:

الفرضيات:

* ليكن c عدد قنوات الخدمة.
* وليكن n عدد الزبائن في النظام.
* λ معدل وصول الزبائن خلال فترة زمنية ما، وهو وصول عشوائي يتبع توزيعاً بواسونياً.
* μ معدل الخدمة التي تقدمها كل قناة خدمة، وذلك وفق توزيع إحصائي أسي

وذلك بافتراض أن جميع القنوات متماثلة في الخدمة من حيث الكفاءة والأداء.

- سنضع $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$.

سنناقش عدة حالات في هذا الصدد:

الحالة الأولى: أن يكون عدد الزبائن في النظام أصغر أو يساوي عدد قنوات الخدمة

أي أن يكون $n \leqslant c$.

المناقشة النظرية:

- سنعتبر أن الخدمة تبدأ عند وصول أول زبون إلى مركز الخدمة.

يذهب أول زبون إلى إحدى قنوات الخدمة، وفي حال وجود زبونين يذهب كل منهما إلى قناة خدمة، وهكذا...

- وسنعتبر أن مفهوم أن تكون القناة جاهزة لتأدية الخدمة يختلف عن مفهوم كونها مشغولة أو غير مشغولة.

فمثلاً من أجل i زبون في مركز الخدمة فسيكون بشكل عام i قناة خدمة على الأكثر قد أدت الخدمات للزبائن، ولكن هناك احتمال ألا تكون قد انتهت الخدمة بعد في أي من القنوات عند وصول الزبون الجديد (i+1)، لذلك ينبغي أن تكون قناة جديدة قد تجهزت لتأدية الخدمة، لذا سنعتبر دوماً أنه من أجل i زبون في مركز الخدمة فإنه توجد i+1 قناة خدمة جاهزة للاستخدام، وهكذا حتى نصل إلى آخر قناة خدمة c.

وبذلك سوف يتغير معدل الخدمة بحسب عدد الزبائن الموجودة في المركز، بينما يبقى معدل

الوصول ثابتاً، ويكون من أجل i زبون في النظام:

$$\lambda_i = \lambda \quad , \quad u_{i+1} = (i+1)u$$

أي سيصبح لدينا:

$$\lambda_0 = \lambda \qquad u_1 = u$$
$$\lambda_1 = \lambda \qquad u_2 = 2u$$
$$\lambda_2 = \lambda \qquad u_3 = 3u$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\lambda_{c-1} = \lambda \qquad u_c = c\,u$$

- إذا ناقشنا العلاقة الرياضية التكرارية التي تربط احتمالات انتظار الزبائن ببعضها حسب قيم n: $\lambda_n P_{n-1}(t) - (u_{n+1} + \lambda_n) P_n(t) + u_{n+1} P_{n+1}(t) = 0$

كما فعلنا عندما كانت لدينا قناة خدمة واحدة فنحصل على العلاقة التالية:

$$P_n = \left(\frac{\lambda_0}{u_1}\right)\left(\frac{\lambda_1}{u_2}\right) \cdots\cdots \left(\frac{\lambda_{c-1}}{u_c}\right) P_0$$

$$\Longrightarrow P_n = \left(\frac{\lambda}{u} \cdot \frac{\lambda}{2u} \cdot \frac{\lambda}{3u} \cdots\cdots \frac{\lambda}{nu}\right) P_0$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{u}\right)^n \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots\cdots \frac{1}{n}\right) P_0 \Longrightarrow \boxed{P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0}$$

- نعلم أن المجموع الاحتمالي يساوي الواحد، ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

$$P_0 + \rho P_0 + \frac{\rho^2}{2!} P_0 + \cdots\cdots + \frac{\rho^c}{c!} P_0 + \frac{\rho^{c+1}}{(c+1)!} P_0 + \cdots = 1$$

$$P_0 \Big(\underbrace{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{\rho^c}{c!}}_{\text{Part 1}} + \underbrace{\frac{\rho^{c+1}}{(c+1)!} + \cdots\cdots}_{\text{Part 2}} \Big) = 1 \quad \star$$

لنناقش القسم الثاني part2 :

في الحقيقة لا يمكن لعدد قنوات الخدمة أن يكون لانهائياً ، وبذلك يصبح لدينا :

$$\text{part2} = \frac{\rho^{c+1}}{c\,c!} + \frac{\rho^{c+2}}{c^2\,c!} + \cdots$$

$$\text{part2} = \frac{\rho^{c+1}}{c\,c!}\left(1 + \frac{\rho}{c} + \frac{\rho^2}{c^2} + \cdots\right)$$

ولكن $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \Longrightarrow \frac{\rho}{c} < 1$

$$\Longrightarrow \text{part2} = \frac{\rho^{c+1}}{c\,c!}\left(\frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}\right)$$

$$\Longrightarrow \text{part2} = \frac{\rho^{c+1}}{(c-\rho)\,c!}$$

نعوض الآن في العبارة ★ فنجد :

$$P_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{c+1}}{(c-\rho)\,c!}\right] = 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{c+1}}{(c-\rho)\,c!}}}$$