الأحد : 16/11/2014

المحاضرة الحادية عشر:

نتيجة من المبرهنة السابقة:

إن طول منحنٍ مستقل عن التمثيل وهذا المنحني ؛ أي مع اختلاف صيغة المنحني ليس للتمثيل شرط ؟

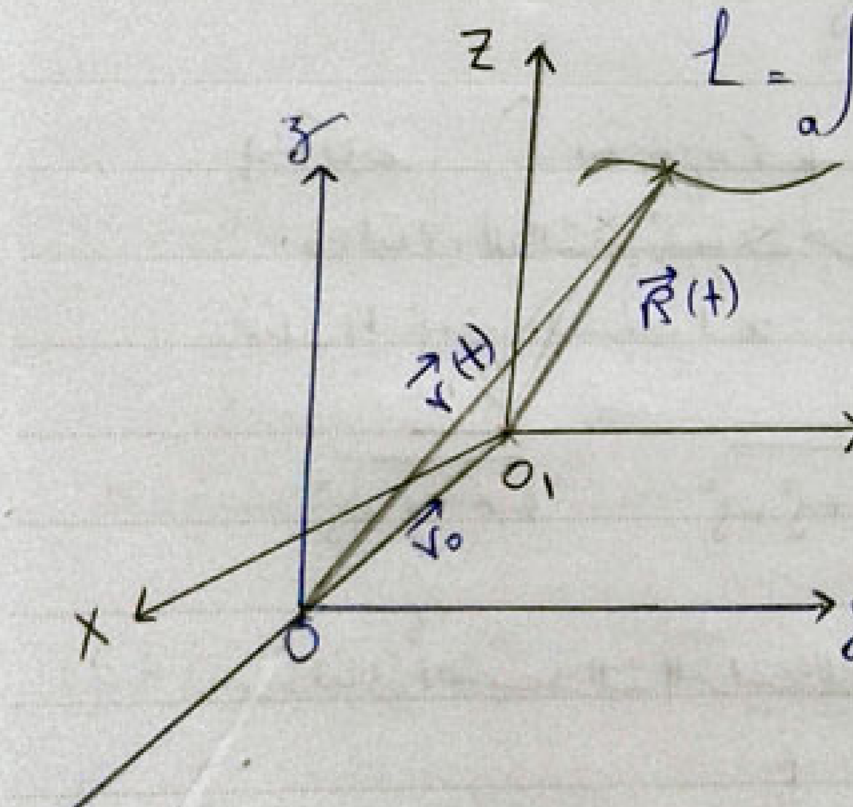
مبرهنة:

إنَّ طول منحنٍ مستقل عن الجملة الإحداثية : [illegible] $\vec{r}$ سيتغير لكن الطول لا يتغير

الإثبات:

إنَّ طول المنحني يعرف بـ :

$$l = \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$$



إنَّ طول المتجه لا يتأثر بتدوير الجملة الإحداثية حول المبدأ (وإن تغيرت المركبات)

$\Leftarrow$ l لا يتأثر بالدوران للجملة .

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_0$$

$$\Rightarrow \vec{R}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$$

حيث $\vec{R}(t)$ متجه الموضع للمنحني في الجملة بعد الانسحاب .

$\vec{r}_0$ متجه ثابت .

$$\text{طول المنحني بعد الانسحاب} \leftarrow l = \int_a^b \|\vec{R}\,'(t)\|\,dt = \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = l$$

ثم تغير جملة إحداثية إما بالتدوير أو الانسحاب أو الانسحاب والتدوير

تعريف الوسيط الطبيعي :

لتكن $\vec{r} : t \longrightarrow \vec{r}(t)$ تمثيلاً نظامياً من الصف C_k حيث $(k \geq 1)$ قطعياً لمنحنٍ $\mathcal{L}$ ،
فيمكننا أن نعرف وسيطاً جديداً s للمنحني $\mathcal{L}$ معرفاً بالعلاقة :

$$s = \int_{t_0}^{t} \| \vec{r}\,'(u) \| \, du$$

حيث t_0 نقطة مثبتة من مجال $\vec{r}$ ولكن هذا المجال I ، و t نقطة متحولة من I

- إن $\vec{r}\,'$ دالة من الصف C_{k-1} قطعية محلياً . لأن $\vec{r}$ دالة من الصف C_k قطعياً
- فالدالة $\vec{r}\,'$ هي من الصف C_{k-1} قطعياً على المجال المتراص $[t_0 , t]$ فهي منه الصف C_{k-1} قطعياً محلياً.

كما أن دالة النظيم :

$$\|.\| : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

إذا كان $(x, y, z) \neq (0, 0, 0) \Longleftarrow x^2 + y^2 + z^2 > 0$

وبالتالي للدالة مشتقات جزئية من كل المراتب (محققة الشرط)

فمثلاً المشتق بالنسبة لـ x :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Longleftarrow$$ $\|.\|$ من الصف C_∞ حيث البسط كثير حدود قابل للاشتقاق والمقام أكبر من الصفر.

وبالتالي أصبحت دالة التركيب $(\underbrace{\|.\|}_{C_\infty} \circ \underbrace{\vec{r}\,'}_{\text{المسيرة}})(t) = \vec{r}\,'(u)$ من الصف C_{k-1} قطعياً محلياً.

من الصف C_{k-1}

حسب مبرهنة في المحاضرة السابقة $\Longleftarrow$ $s = \int_{t_0}^{t} \| \vec{r}\,'(u) \| du$ مستمرة على I

مستمرة قطعياً على I

و $\frac{ds}{dt} = \| \vec{r}\,'(t) \| > 0$ محققة لأجل كل t من مجموعة استمرار $(\|.\| \circ \vec{r}\,')$

$\Longleftarrow$ $\frac{ds}{dt}$ موجود وغير معدوم عند كل نقطة من نقاط I ماعدا نقاط التجزئة على الأكثر.

إن s متزايدة تماماً لأن $\frac{ds}{dt} > 0$ و s مستمرة على I

ونرمز بـ $s(I) = J$ سيكون J مجالاً من طبيعة I لأن s مستمرة ومتزايدة تماماً

أصبح لدينا: $s : I \longrightarrow J$ متزايدة تماماً ومستمرة وغامرة و أكثر من ذلك هي

من الصنف C^k قطعياً: (لأن $\|\vec{r}'(t)\|$ من الصنف C^{k-1} قطعياً عند كل نقطة t

ليست من نقاط التجزئة ومنه نستنتج من المساواة $\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}'(t)\|$ أن الدالة s

من الصنف C^k قطعياً}

نستنتج أن لـ s (بما أنها غامرة ومتزايدة تماماً ومستمرة (تقابل)) دالة عكسية

مستمرة ومتزايدة تماماً ولتكن:

$$\phi : J \longrightarrow I$$

$$s \longmapsto t = \phi(s)$$

وأكثر من ذلك هي من الصنف C^k قطعياً (حسب مبرهنة في التحليل)

لنبني تمثيلاً جديداً: $\vec{r}_1 : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{r}_1 = \vec{r} \circ \phi$$

إن $(\vec{r}_1 \sim \vec{r})$ لأن ϕ دالة منطلقها هو منطلق $\vec{r}_1$ ومتزايدة تماماً ومستمرة و

غامرة وتحقق المساواة $\vec{r}_1 = \vec{r} \circ \phi$ (بناءً)

و $\vec{r}_1$ تمثيل مسموح به لـ L وسيطه s.

نسمي $\vec{r}_1$ التمثيل الوسيطي الطبيعي لـ L الناتج عن التمثيل $\vec{r}$ ونسمي وسيطه s

بالوسيط الطبيعي أو الوسيط القوسي أو طول القوس.

نسمي عملية تعيين التمثيل الوسيطي الطبيعي $\vec{r}_1$ انطلاقاً من تمثيل آخر بالتوسيط طبيعياً

للمنحني.

- وإذا كان المنحني L متراصاً $(I = [a, b])$

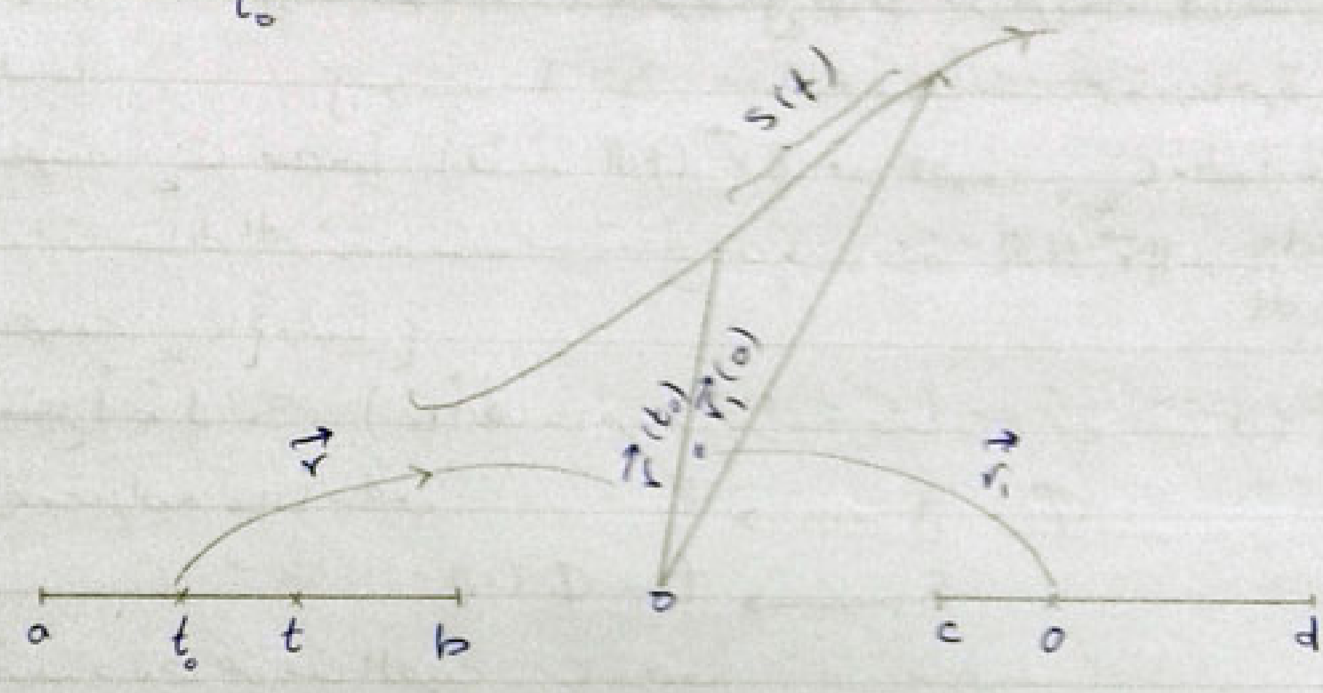
فإن $J = [c, d]$ حيث:

$$c = s(a) \quad , \quad d = s(b)$$

$$c = s(a) = \int_{t_0}^{a} \|\vec{r}'(t)\|\, dt \quad , \quad d = s(b) = \int_{t_0}^{b} \|\vec{r}'(t)\|\, dt$$

إنّ قيمة الوسيط الطبيعي s المقابلة لـ t_0

$$S_0 = S(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = 0$$



ملاحظات :

1- التمثيل الوسيطي الطبيعي ليس وحيداً وإنما يتعلق بـ t_0 ($\vec{r}(t_0)$ مبدأ قياس أطوال الأقواس)

$$S_1(t) = \int_{t_1}^{t} \|\vec{r}\,'(u)\| du = \int_{t_1}^{t_0} \|\vec{r}\,'(u)\| du + \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}(u)\| du$$

$$= \underbrace{\int_{t_1}^{t_0} \|\vec{r}\,'(u)\| du}_{\text{طول قوس المنحني المحصور بين المبدأين}} + s \Rightarrow S_1 = C + S$$

2- $\vec{r}$ وسيطه t ولكن بعد التمثيل $t = \phi(s)$

سنرمز بـ $\overset{\circ}{\vec{r}}$ للدالة على المشتق للتمثيل $\vec{r}$ بالنسبة للوسيط الطبيعي :

$$\overset{\circ}{\vec{r}}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

أما $\vec{r}'$ فإنها تعني الاشتقاق للتمثيل $\vec{r}$ بالنسبة للوسيط t (الوسيط $\vec{r}$)

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

3- إنّ التوسيط الطبيعي لا يتعلق باختيار تمثيل معين للمنحني موضوع الدراسة: أي أن التمثيل الوسيطي الطبيعي لتمثيلين متكافئين هو نفسه شريطة أن نختار نفس المبدأ لقياس أطوال الأقواس.

مبرهنة:

① إذا كانت p نقطة نظامية (غير شاذة) في تمثيل نظامي من الصنف C^n قطعياً لمنحني L فإن p لابد أن تكون نقطة نظامية في التمثيل الوسيطي الطبيعي لذلك المنحني ② وإن التمثيل الوسيطي الطبيعي سيكون من الصنف C^n قطعياً

البرهان:

① ليكن $\vec{r}(t)$ $t \longrightarrow \vec{r}(t)$ تمثيلاً للمنحني L من الصنف C^n قطعياً و $\vec{OP} = \vec{r}(t_0)$

ومن الفرض p نقطة نظامية في التمثيل $\vec{r}$ $\Longleftarrow$ $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$

{سنثبت هذه المبرهنة في حالة أن $\vec{r}'$ مستمراً عند t_0}

وبما أن: $\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}'(t)\|$ موجود ومستمر عند كل نقطة من نقاط استمرار $\|.\| \circ \vec{r}'$

$$\Longrightarrow \frac{ds}{dt}(t_0) = \|\vec{r}'(t_0)\|$$

ومن الفرض $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$ $\quad \Longrightarrow \frac{ds}{dt}(t_0) \neq 0$

$\Longleftarrow$ الدالة العكسية لها ستكون قابلة للاشتقاق عند $0 = s(t_0)$ (حسب مبرهنة)

$$\frac{dt}{ds}(0) = \frac{1}{\|\vec{r}'(t_0)\|}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\vec{r}}{ds}(0) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) \cdot \frac{dt}{ds}(0)$$

$$= \frac{\vec{r}'(t_0)}{\|\vec{r}'(t_0)\|} \neq \vec{0}$$

كون النقطة م المرافقة لـ ب نظامية في التمثيل $\vec{\text{ر}}$.

$$\Rightarrow \vec{\text{ر}}'(٠) \neq \vec{٠}$$

أي أن المشتق للتمثيل الوسيطي الطبيعي عند النقطة (٠) لا يساوي الصفر

$\Leftarrow$ م نقطة نظامية في التمثيل الوسيطي الطبيعي.

وهذا برهان الجزء الأول من المبرهنة:

- إن عكس هذه المبرهنة غير صحيح بالضرورة

سيتم برهان الجزء الثاني في المحاضرة القادمة