المحاضرة الثانية عشر

المجموع المباشر الداخلي لأسرة مودولات

ليكن $(M_i)_{i=1,\dots,n}$ أسرة مودولات جزئية
مودول M عندئذٍ
$\sum_{i=1}^{n} M_i = \{m\in M : m=\sum_{i=1}^{n} m_i , m_i\in M_i\}$ مودول
جزئي من M
نقول عن المجموع $\sum_{i=1}^{n} M_i$ إنه مباشر
إذا كان كل عنصر $m\in\sum_{i=1}^{n} M_i$
يكتب بشكل وحيد $m=\sum_{i=1}^{n} m_i$
حيث $m_i\in M_i$
ونرمز لذلك بالكتابة $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$

ملاحظة:

$m=(m_1,m_2,\dots,m_n)$

$\prod_{i=1}^{n} M_i$ يماثل مودولاً جزئياً $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$

مبرهنة:

إذا كانت $(M_i)_{i=1,\dots,n}$ أسرة مودولات جزئية
من مودول M فإن القضايا التالية
متكافئة

(1) المجموع $\sum_{i=1}^{n} M_i$ مباشر

(2) إذا كان $\sum_{i=1}^{n} m_i=0$ حيث $(m_i\in M_i)$
فإن $m_i=0 \quad \forall i=1,\dots,n$

(3) $M_j\cap\sum_{i\neq j}^{n} M_i=0$

الإثبات:

$(1)\Rightarrow(2)$ ليكن $\sum_{i=1}^{n} m_i=0 ; m_i\in M_i$

$0=\sum_{i=1}^{n} 0$

$\sum_{i=1}^{n} m_i=0=\sum_{i=1}^{n} 0 \xRightarrow{(1)} m_i=0 \quad \forall i=1,\dots,n$

$(2)\Rightarrow(3)$ أياً كان

$m\in M_j\cap\sum_{i\neq j}^{n} M_i$

$m\in M_j$ and $m\in\sum_{i\neq j}^{n} M_i$

$m=m_j ; (m_j\in M_j)$ and $m=\sum_{j\neq i} m_i$

$m_j=\sum_{j\neq i}^{n} m_i$

$m_1+m_2+\dots+(-m_j)+\dots+m_n=0$

$\xRightarrow{(2)} m_i=0 \quad \forall i=1,\dots,n$

$\Rightarrow m=0$

$(3)\Rightarrow(1)$

لنفرض أنّ

$(\forall m\in\sum_{i=1}^{n} M_i \quad m=\sum_{i=1}^{n} m_i=\sum_{i=1}^{n} m'_i$

$; m_i , m'_i\in M_i$

$m_j+\sum_{i\neq j}^{n} m_i = m'_j+\sum_{i=1}^{n} m'_i \quad \forall j=1,\dots,n$

$\underbrace{m_j-m'_j}_{M_j}=\underbrace{\sum_{i=1, i\neq j}^{n}(m'_i-m_i)}_{\sum_{i\neq j}^{n} M_i}$

$m_j-m'_j\in M_j\cap\sum_{i=1, i\neq j}^{n} M_i$

$\xRightarrow{(3)} m_j-m'_j=0 \quad \forall j=1,\dots,n$

$m_j=m'_j \quad \forall j=1,\dots,n$

تعريف:

ليكن A,B مودولين جزئيين من مودول M
نقول عن المودولين B,A أنهما متكاملان في
M إذا كان $M=A\oplus B$

$$M = A \oplus B \iff \left[\underbrace{M = A + B} \text{ and } A \cap B = 0\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall m \in M : m = a + b \,;\, a \in A, b \in B$$