$M = A \oplus B \Leftrightarrow [M = A+B \text{ and } A \cap B = 0]$

$\Updownarrow$

$\forall m \in M : m = a+b \; ; \; a \in A, b \in B$

المحاضرة الثالثة عشر

مبرهنة 1 ..

إذا كانت $(M_i)_{i=1,\dots n}$ أسرة مودولات على حلقة R ، N مودول على الحلقة R فإنّ

$$\text{Hom}(N, \prod_{i=1}^{n} M_i) \cong \prod_{i=1}^{n} \text{Hom}(N, M_i)$$

(نمرة) (نمرة)

منطلق $f : N \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} M_i$

$pr_i : \prod_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow M_i$

$pr_i \circ f : N \longrightarrow M_i$

$(pr_1 \circ f, pr_2 \circ f, \dots pr_n \circ f) \in \prod_{i=1}^{n} \text{Hom}(N, M_i)$

وبذلك لنأخذ العلاقة

$\theta : \text{Hom}(N, \prod_{i=1}^{n} M_i) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \text{Hom}(N, M_i)$

($N \to M_1$, $N \to M_2$ ..)

$\theta(f) = (pr_i \circ f)_{i=1,\dots n}$

• إنّ العلاقة θ تطبيق لأنّ

إذا كان $f, g \in \text{Hom}(N, \prod_{i=1}^{n} M_i)$ بحيث

$f = g$

فكرة البرهان (يكفي برهان $\theta(f) = \theta(g)$)

$\downarrow$

$pr_i \circ f = pr_i \circ g$.

$pr_i \circ f = pr_i \circ g \quad \forall i = 1, \dots n$

$\theta(f) = \theta(g)$

بما أنّ التطبيق θ يحقق شرط التشاكل الزمري لأنّ أياً كان $f, g \in \text{Hom}(N, \prod_{i=1}^{n} M_i)$ فإنّ

$\theta(f+g) = (pr_i \circ (f+g))$

التركيب توزيعي على الجمع

$= (pr_i \circ f + pr_i \circ g)_{i=1,\dots n}$

$= (pr_i \circ f)_{i=1,\dots n} + (pr_i \circ g)_{i=1,\dots n}$

$= \theta(f) + \theta(g)$

• برهان الغمر

كما أنّ التطبيق θ غامر : لأنه

عنصر كيفي من المستقر

أياً كان $(g_i) \in \prod_{i=1,\dots n}^{n} \text{Hom}(N, M_i)$

(نريد برهان وجود تشاكل مودولي في المنطلق)

$\prod_{i=1}^{n} M_i$ ومستقره (منطلقه N)

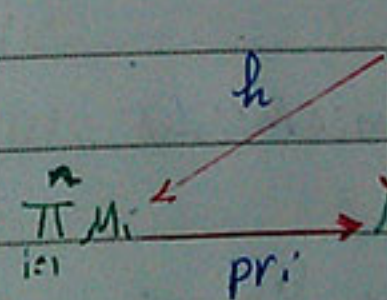
بما أنّ $(\prod_{i=1}^{n} M_i, pr_i)$ جداء للأسرة $(M_i)_{i=1,\dots n}$ فإنه من أجل المودول N والأسرة $(g_i)_{i=1,n}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد

$h : N \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} M_i$

يحقق $pr_i \circ h = g_i \quad \forall i = 1, \dots n$

$\Rightarrow (pr_i \circ h)_{i=1,\dots n} = (g_i)_{i=1,\dots n}$

$\Rightarrow \theta(R) = (g_i)_{i=1,\dots n}$



في حقل
$ax=b \Rightarrow x=\frac{b}{a}\ ;\ a\neq 0$

في حلقة غير صحيح
$ax=b \Rightarrow x=\frac{b}{a}$ غير موجود a^{-1} لأنه

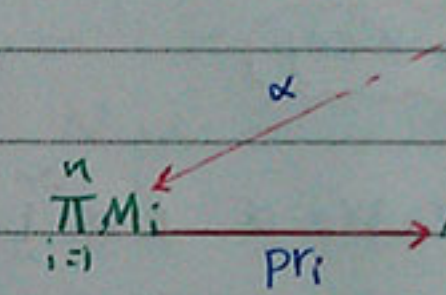
f غامر $\Leftrightarrow$ للمعادلة $y=f(x)$ حلّ في المنطلق من أجل المستوى y
وإذا كان الحل وحيد (غامر ومتباين)

$ax=b$ in z
$a^{-1}\in z$; $/a=\pm 1$

SUBJECT:

$ax=e \Rightarrow x=e.a^{-1}$ (27)

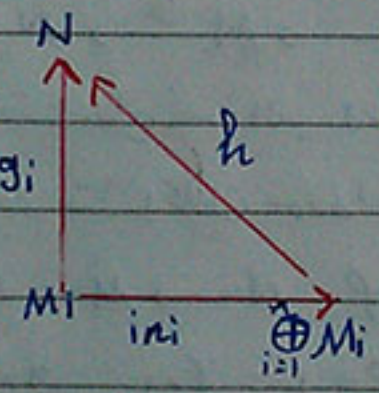
• θ متباين لأنه أيّاً كان $\alpha \in Ker\theta$
$(\alpha \in Hom(N, \prod_{i=1}^{n} Mi)$
فإنّ $\theta(\alpha)=0$
أي أنّ $pr_i \circ \alpha = 0$
وبما أنّ $(\prod_{i=1}^{n} Mi, pr_i)$ جداء للأسرة المودولات فإنه
α وحيد ، $\alpha=0$ تحقق فإنّ
$Ker\theta=0$



مبرهنة 2 .
إذا كانت $(M_i)_{i=1\cdots n}$ أسرة مودولات على حلقة R ، N مودول على R فإن
$Hom(\bigoplus_{i=1}^{n} Mi, N) \cong \prod_{i=1}^{n} Hom(Mi, N)$
البرهان:
$\theta : Hom(\bigoplus_{i=1}^{n} Mi, N) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} Hom(Mi, N)$
تباين تقابل $in_k : M_k \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} Mi$: $in_k \rightarrow (0,0,m_k,0\cdots)$
$\theta(f)=(f\circ in_i)_{i=1,\cdots n}$
إنّ θ تطبيق أيّاً كان
$f,g \in Hom(\bigoplus_{i=1}^{n} Mi, N)$
حيث $f=g$ فإنّ
$f\circ in_i = g\circ in_i \quad \forall i=1\cdots n$
توضيح أنّ $f\circ in_k(m_k) = f(0,0,\cdots m_k,0\cdots 0)$
$= g(0,0,\cdots m_k,0\cdots 0)$
$= g\circ in_k(m_k)$

وبالتالي $\theta(f)=\theta(g)$
كما أنّ θ تحقق شرط التماثل الزمري
$\theta(f+g) = ((f+g)\circ in_i)_{i=1\cdots n}$
$= (f\circ in_i)_{i=1\cdots n} + (g\circ in_i)_{i=1,\cdots n}$
$= \theta(f)+\theta(g)$

• برهان الغمر.
كما أنّ θ غامر لأنه أيّاً كان
$(g_i)_{i=1\cdots n} \in \prod_{i=1}^{n} Hom(Mi, N)$
بما أنّ $(\bigoplus_{i=1}^{n} Mi, in_i)$ جداء توافقي للأسرة (M_i) فإنه من أجل المودول N والأسرة $(g_i)_{i=1\cdots n}$ يوجد تماثل مودولي وحيد
$h : \bigoplus_{i=1}^{n} Mi \longrightarrow N$
يحقق $h\circ in_i = g_i \quad \forall i=1,\cdots n$
$(h\circ in_i)_{i=1\cdots n} = (g_i)_{i=1,\cdots n}$



$\theta(h) = (g_i)_{i=1,\cdots n}$
ونلاحظ أن h وحيد فإن التطبيق θ متباين