2 الاستراتيجية المختلطة:

تُستخدم الاستراتيجية المختلطة في حال كانت المباراة متكررة عدة مرات.
وهنا ندرس احتمال اختيار كل لاعب لاستراتيجية ما، وبالتالي يمكننا دراسة توقع ربح كل لاعب من اللاعبين.
سوف ندرس الحالة التي يكون فيها أمام كل لاعب استراتيجيتين فقط.

- ليكن p احتمال اختيار اللاعب الأول (السطري) للاستراتيجية الأولى
$\Leftarrow$ $1-p$ هو احتمال اختيار اللاعب الأول للاستراتيجية الثانية.
- وليكن q احتمال اختيار اللاعب الثاني (العمودي) للاستراتيجية الأولى.
$\Leftarrow$ $1-q$ هو احتمال اختيار اللاعب الثاني للاستراتيجية الثانية.

ومهمتنا هي إيجاد p, q الأمثليين.

- لتحديد ذلك نوجد المقدار $\pi(p, q)$ الذي يعبّر عن توقع ربح اللاعب الأول (أي توقع خسارة اللاعب الثاني) إذا كان p احتمال اختيار اللاعب الأول للاستراتيجية الأولى، و q احتمال اختيار اللاعب الثاني الاستراتيجية الثانية.
ثم نكتب هذا المقدار بالشكل:

$$\pi(p, q) = \delta(p-\alpha)(q-\beta) + \gamma \quad ; \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$$

فتكون الاستراتيجية المختلطة هي:
أن يختار اللاعب الأول الاستراتيجية الأولى باحتمال $p=\alpha$ ويضمن أن يربح بالمتوسط γ على الأقل. (أو يخسر المقدار $-\gamma$ على الأكثر إذا كان $\gamma<0$)
وأن يختار اللاعب الثاني الاستراتيجية الأولى باحتمال $q=\beta$ ويضمن أن يخسر بالمتوسط γ على الأكثر. (أو يربح المقدار $-\gamma$ على الأقل إذا كان $\gamma<0$)

ونلاحظ أن هذه الخيارات تمنع الخصم من التحكم بتوقع الربح أياً كانت الاستراتيجية التي يختارها.

مثال: ليكن لدينا مصفوفة الدخل:

$$\begin{array}{c|cc} & q & 1-q \\ \hline p & 0 & -2 \\ 1-p & -3 & 5 \end{array}$$

أوجد الاستراتيجية المختلطة لكل من اللاعبين.

الحل: توقع ربح اللاعب الأول:

$$\pi(p,q) = 0pq + (-2)p(1-q) + (-3)(1-p)q + 5(1-q)(1-p)$$

$$\pi(p,q) = 2pq + 3pq + 5pq - 2p - 3q - 5p - 5q + 5$$

$$\pi(p,q) = 10pq - 7p - 8q + 5$$

ولكن نريد كتابة التوقع بالشكل:

$$\pi(p,q) = \delta(p-\alpha)(q-\beta) + \gamma$$

$$\pi(p,q) = -\delta\beta p - \delta\alpha q + \delta pq + \delta\alpha\beta + \gamma$$

بالمطابقة ينتج لدينا أربعة معادلات بأربعة مجاهيل بحلها نحصل على:

$$\pi(p,q) = 10\left(p - \frac{8}{10}\right)\left(q - \frac{7}{10}\right) - 0.6$$

ومنه فالاستراتيجية المختلطة هي:

أن يختار اللاعب السطري السطر الأول باحتمال $p = \frac{8}{10}$

ويضمن أن يخسر بالمتوسط 0.6 على الأكثر.

(أي كل 10 مرات يختار الاستراتيجية الأولى 8 مرات).

وأن يختار اللاعب العمودي العمود الأول باحتمال $q = \frac{7}{10}$

ويضمن أن يربح بالمتوسط 0.6 على الأقل.

(أي كل 10 مرات يختار الاستراتيجية الأولى 7 مرات).

/ /

* منحنيات أفضل استجابة للاعبين.

تظهر أفضل استجابة للاعبين من أجل كل استراتيجية ممكنة للاعب الخصم.

وهي عبارة عن منحنى لكل لاعب.

$R_R(q)$: مجموعة الاستراتيجيات التي تحقق أفضل استجابة للاعب السطري حسب قيمة q.

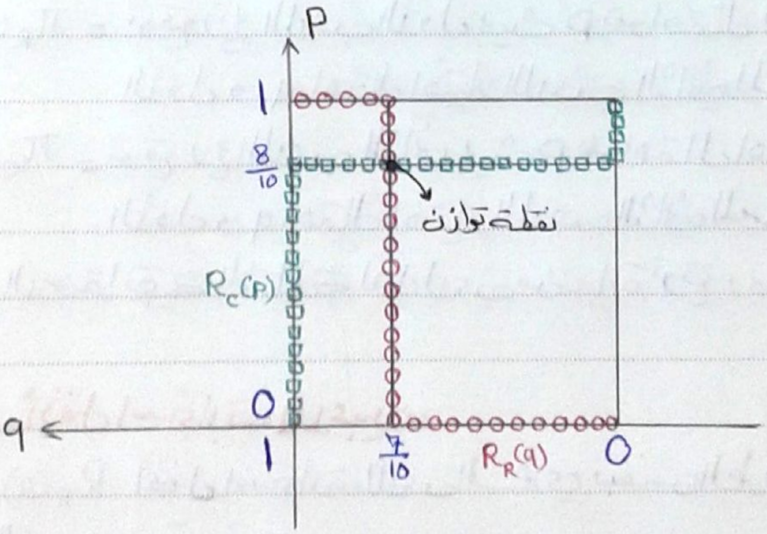
$R_C(p)$: مجموعة الاستراتيجيات التي تحقق أفضل استجابة للاعب العمودي حسب قيمة p.

ويتم استنتاجها من عبارة التوقع لتحقيق أكبر ربح ممكن للاعب.

بالنسبة للمثال السابق:

$$R_R(q)\begin{cases} q > \frac{7}{10} & \text{أفضل استجابة للاعب السطري } p=1. \\ q < \frac{7}{10} & \text{أفضل استجابة للاعب السطري } p=0. \\ q = \frac{7}{10} & \text{مهما كانت استجابة اللاعب السطري فلن تتغير قيمة المباراة.} \end{cases}$$

$$R_C(p)\begin{cases} p > \frac{8}{10} & \text{أفضل استجابة للاعب العمودي } q=0. \\ p < \frac{8}{10} & \text{أفضل استجابة للاعب العمودي } q=1. \\ p = \frac{8}{10} & \text{مهما كانت استجابة اللاعب العمودي فلن تتغير قيمة المباراة.} \end{cases}$$



إن نقاط تقاطع المنحنيين $R_R(q)$, $R_C(p)$ هي نقاط توازن المباراة (متوازنة Nash).

وفي هذا المثال نقطة التوازن هي:

$$p = \frac{8}{10} \quad , \quad q = \frac{7}{10}$$