التاريخ: / /

الموضوع:

أوجد حل مشترك تقريبي للجملة

$f(x,y) = 2x - y + 1 = 0$

$g(x,y) = y - \cos x = 0$

بطريقة نيوتن بدقة $\varepsilon = 0.005$ انطلاقاً من

النقطة $(0.5, 0.5)$

الحل:

$$J(f,g) = \begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \sin y & 1 \end{vmatrix} = 2 + \sin x \neq 0$$

ونفرض حل للجملة وليكن $(\bar{x}, \bar{y})$

$(x_0, y_0) = (0.5, 0.5) \Rightarrow J(x_0, y_0) = 2.4794 \neq 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{J(x_0,y_0)} \begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix} (x_0, y_0)$$

$$x_1 = 0.5 - \frac{1}{2.4794} \begin{vmatrix} 1.5 & -1 \\ -0.3775 & 1 \end{vmatrix} = 0.0472$$

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{J(x_0,y_0)} \begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix} (x_0, y_0)$$

$$y_1 = 0.5 - \frac{1}{2.4794} \begin{vmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.4794 & -0.3775 \end{vmatrix} = 1.945$$

$(x_1, y_1) = (0.0472 \ , 1.945) \Rightarrow J(x_1, y_1)$
$= 2.0471 \neq 0$

$x_2 = 0.0005 \quad , y_2 = 1.001$

نلاحظ أن $|x_2 - x_1| = 0.0467 < 0.095 = \varepsilon$

$|y_2 - y_1| = 0.0935 < 0.095 = \varepsilon$

ومنه $(\bar{x}, \bar{y}) \cong (x_2, y_2) = (0.0005 \ , 1.001)$

نلاحظ أن $(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} (0, 1)$

---

التمرين [10]: أعد التمرين السابق من أجل طريقة التكرار:

نلاحظ أن

$x = F(x, y) = \frac{y-1}{2}$

و

$y = G(x, y) = \cos x$

$F_x = 0 \quad , \quad F_y = \frac{1}{2}$

$G_x = -\sin x \quad , \quad G_y = 0$

ومنه

$(|F_x| + |F_y|)(x_0, y_0) = 0 + \frac{1}{2} < 1$

$(|G_x| + |G_y|)(x_0, y_0) = \sin(0.5) < 1$

ومنه يوجد جذر للمعادلة في جوار النقطة $(x_0, y_0)$
وليكن $(\bar{x}, \bar{y})$
بوضع العلاقات التكرارية نجد :

$$x_1 = F(x_0, y_0) = \frac{y_0 - 1}{2} = -0.25$$

$$y_1 = G(x_0, y_0) = \cos(x_0) = 0.8775$$

$$(x_1, y_1) = (-0.25, 0.8775)$$

$$x_2 = F(x_1, y_1) = -0.0612$$
$$y_2 = G(x_1, y_1) = 0.9689$$
$$(x_2, y_2) = (-0.0612, 0.9689)$$

$$x_3 = -0.0155 \quad , \quad y_3 = 0.9981$$

نلاحظ أن $|y_3 - y_2| < \varepsilon$ , $|x_3 - x_2| < \varepsilon$
ومنه نجد أن

$$(\bar{x}, \bar{y}) \cong (x_3, y_3) = (-0.0155, 0.9981)$$

---

[11]: احسب بشكل تقريبي قيمة التكامل

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + \cos x} \quad : n = 4$$

بطريقة المستطيلات و شبه المنحرفات و سيمبسون

الحل:

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$$

| $x$ | 0 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.5 | 0.5075 | 0.5325 | 0.5774 | 0.6492 |

الحل: طريقة المستطيلات:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+\cos x} \simeq 0.25\,[0.5+0.5078+0.5325+0.577$$

$$=0.5294$$

طريقة شبه المنحرف:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+\cos x} \simeq \frac{0.25}{2}\,[0.5+(2)(0.5078)+(2)(0.5325)$$

$$+2(0.5774)+0.6492]=0.548$$

طريقة سمبسون:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+\cos x} \simeq \frac{0.25}{3}\,[0.5+(4)(0.5078)+2(0.5325)$$

$$+(4)(0.5774)+0.6492]$$

$$=0.5462$$

[12] باستخدام طريقة تايلور أوجد حل تقريبي للمعادلة التفاضلية

$y'=y+x^2$ حيث $y(0)=1$ و $h=0.1$

في المجال $[0, 0.2]$ مستخدماً أربع حدود من متسلسلة تايلور:

الحل: نلاحظ أن متسلسلة تايلور بأربع حدود هي:

$$y(x+h)=y(x)+h\,y'(x)+\frac{h^2}{2!}y''(x)+\frac{h^3}{3!}y'''(x)$$

حيث

$$y'(x)=y+x^2$$

$$y''(x)=y'+2x=y+x^2+2x$$

$$y'''(x)=y'+2x+2=y+x^2+2x+2$$

التاريخ: / /

الموضوع:

$(x_0, y_0) = (0, 1) \Longrightarrow$

$$y_1 = y(0.1) = y(x_0) + (0.1)\,y'(x_0) + \frac{(0.1)^2}{2}\,y''(x_0) + \frac{(0.1)^3}{6}\,y'''(x_0)$$

$$= 1 + (0.1)(1) + \frac{(0.1)^2}{2}(1) + \frac{(0.1)^3}{6}(3) = 1.1055$$

$(x_1, y_1) = (0.1, 1.1055) \Longrightarrow$

$$y_2 = y(0.2) = 1.1055 + (0.1)(1.1155) + \frac{(0.1)^2}{2}(1.3155) + \frac{(0.1)^3}{6}(3.3155) = 1.2241$$

| $x$ | 0 | 0.1 | 0.2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 1.1055 | 1.2241 |

13] أعد التمرين من أجل الطريقة العامة