المحاضرة السادسة والعشرون والأخيرة

تمرين: اكتب الأعداد العقدية التالية بالشكل الجبري بالقيمة الرئيسية.

1] $z_1=\sqrt{i}=(i)^{\frac12}$

$\Rightarrow z_1 = e^{\frac12[\ln|i|+i\,Arg(i)+2\pi k]}$; $k=0$

$= e^{\frac12(\ln(1)+i\frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{\sqrt2}+i\frac{1}{\sqrt2}$

2] $z_2=\ln(-e^2)$

$=\ln|-e^2|+i(Arg(-e^2)+2\pi \cancel{k})$; $k=0$

$=2+i\pi$

3] $z_3=\left(\frac{1-\sqrt3 i}{\sqrt3-i}\right)^{10}$

$$\left.\begin{array}{l} 1-\sqrt3 i = 2\,cis\frac{5\pi}{3} \\ \sqrt3 - i = 2\,cis\frac{11\pi}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow z_3 = \left(\frac{2\,cis\frac{5\pi}{3}}{2\,cis\frac{11\pi}{6}}\right)^{10} = \left(cis\left(\frac{10\pi}{6}-\frac{11\pi}{6}\right)\right)^{10}$$

$\Rightarrow z_3=\left(cis\frac{-\pi}{6}\right)^{10} = cis\frac{-10\pi}{6} = cis\left(\frac{-5\pi}{3}\right) = cis\frac{\pi}{3} = \frac12+\frac{\sqrt3}{2}i$

4] $\sin\left(\frac{\pi}{2}-i\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(\frac{\pi}{2}-i)} - e^{-i(\frac{\pi}{2}-i)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}e - e^{\frac{-i\pi}{2}}e^{-1}\right)$

$=+\frac{1}{2i}\left(e\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) - e^{-1}\left(\cos-\frac{\pi}{2}+i\sin-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$=\frac{1}{2i}\,i\left(e+e^{-1}\right) = \frac{e+e^{-1}}{2}$

Subject ____ التاريخ :
Date ____ الموضوع :

تمرين 5: أوجد قرص التقارب للمتسلسلات التالية ثم مثلها هندسياً.

1] $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{\sqrt{3}-i}\right)^n$

متسلسلة قوى من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-i}\right)^n (z+2)^n$

مركزها هو $z_0=-2$ ونصف قطر تقاربها

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{\sqrt{3}-i}\right|^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\sqrt{3}-i|^n}=\lim_{n\to\infty}2$$

$\Rightarrow r=2$

قرص التقارب هو $D(-2,2)$ $\Leftarrow$

2] $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(z+i-2)^{n+1}$

متسلسلة قوى مركزها $z_0=2-i$ ونصف قطر تقاربها

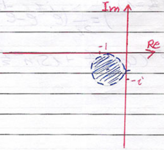
$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$$

متقاربة فقط عند مركزها $z_0=2-i$

3] $\sum_{n=0}^{\infty}(-\sqrt{2}\,i\,z+1-i)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-i\sqrt{2})^n\left(z-\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)$

متسلسلة قوى مركزها $z_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$

ونصف قطر تقاربها



$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\sqrt{2})^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

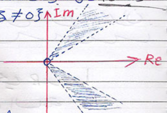
$\Rightarrow R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ومنه قرص التقارب هو

$D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

تمرين 6: مثّل المجموعات التالية هندسياً في مستوي غاوس

1] $A_1=\{z\in\mathbb{C}: \frac{\pi}{6}<|\arg(z)|<\frac{\pi}{3} \;;\; z\neq 0\}$



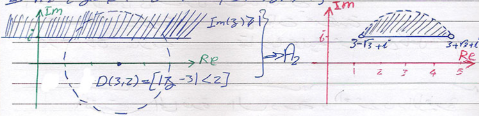
$\frac{\pi}{6}<\arg(z)<\frac{\pi}{3}$ إما

$\frac{\pi}{6}<-\arg(z)<\frac{\pi}{3}$ أو

$\arg(z)\in\left]-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[$

A_1 مفتوحة وغير مغلقة وغير محدودة وغير محدبة وغير مترابطة وليست منطقة.

2] $A_2=\{z\in\mathbb{C}: |z-3|<2 \,,\, Im(z)\geq 1\}$

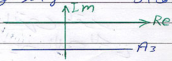


3] $A_3=\{z\in\mathbb{C}: Im\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z\bar{z}}\}$

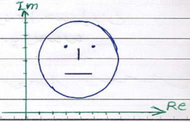
$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$ حيث $z=x+iy$ نفرض أن

$z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$ إذاً

$\Rightarrow \frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{1}{x^2+y^2} \Rightarrow \boxed{y=-1}$



4] $A_4=c(4+4i,3)\cup[4+4i,4+5i]\cup[3+3i,5+3i]\cup\{3+5i,5+5i\}$



Subject
Date

التاريخ :
الموضوع :

ملاحظة هامة: تم حذف إثبات مبرهنة ميرتن.

مواعيد تواجد الدكتور سامي جديبا
يوم الاثنين من الساعة 10 حتى الساعة 16
يوم الأربعاء من الساعة 10 حتى الساعة 16

أسئلة الامتحان ستكون بالشكل التالي
على اثبات مبرهنة 15 ← 10 علامة
تمارين عملية موزعة على كامل المقرر 90 ← 85 علامة

انتهت المحاضرة السادسة والعشرون والأخيرة
26

انتهى المقرر
بتوفيق الله للجميع

لا تنسونا من صالح دعائكم
إخوانكم أسرة عمل سيرياماث
www.syriamath.net