Subject

Date 2014/12/12

23

المحاضرة الثالثة والعشرون

التاريخ :

الموضوع :

5) التوابع العقدية المثلثية

نفرض $z=x+iy$ متحول عقدي عندئذ نعرف توابع ال cos وال sin كما يلي :

$$\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \boxed{\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}$$

أي يمكن تمثيل تابع ال cos عن طريقة متسلسلة قوى ويمكن اشتقاقها دوماً ومشتقها هو الاشتقاق حداً حداً.

$$\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \boxed{\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}$$

كذلك نعرف تابع ال tan وال cot كما يلي

$$\boxed{\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}}$$

$$\boxed{\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}}$$

(*) نلاحظ أن تابعا ال cos وال sin هما تابعان دوريان ودور كل منهما هو (2π)

لأن

$$\cos(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz}e^{i2\pi}+e^{-iz}e^{-i2\pi}}{2}$$

نعلم أن : $(e^{i2\pi}=1)$

$$\Rightarrow \cos(z+2\pi) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$\sin(z+2\pi) = \sin(z)$$ بنفس الطريقة نستنتج

(*) أما توابع ال tan وال cot دوريان ودور كل منها π لأن :

$$\tan(z+\pi) = \frac{1}{i}\,\frac{e^{i(z+\pi)}-e^{-i(z+\pi)}}{e^{i(z+\pi)}+e^{-i(z+\pi)}} = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{iz}e^{i\pi}-e^{-iz}e^{-i\pi}}{e^{iz}e^{i\pi}+e^{-iz}e^{-i\pi}}\right)$$

$$=\frac{1}{i}\ \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=\tan$$

بنفس الطريقة نثبت ان $\cot(z+\pi)=\cot(z)$

نلاحظ ان توابع ال cos وال sin هي توابع ممثلة
بمتسلسلات قوى وبالتالي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{C}$ فيكون

$(\cos z)'=-\sin z$

$(\sin z)'=\cos z$

ومنه توابع ال cos وال sin هي توابع تحليلية على $\mathbb{C}$.

أما توابع ال tan وال cot تحليلية على مجموعة تعريفها فقط

$$(\tan z)'=\frac{1}{\cos^2 z}=1+\tan^2 z$$

$$(\cot z)'=\frac{-1}{\sin^2 z}=-(1+\cot^2 z)$$

تمرين: اكتب الأعداد العقدية التالية بالشكل الجبري.

1) $\cos(2i)=\dfrac{e^{i(2i)}+e^{-i(2i)}}{2}=\dfrac{e^{-2}+e^{2}}{2}$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+i\right)=\dfrac{e^{i(\frac{\pi}{4}+i)}-e^{-i(\frac{\pi}{4}+i)}}{2i}=\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-1}-e^{-i\frac{\pi}{4}}e}{2i}$

$$=\frac{e^{-1}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})-e(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))}{2i}$$

$$=\frac{e^{-1}(\frac{1}{\sqrt2})+ie^{-1}(\frac{1}{\sqrt2})-e(\frac{1}{\sqrt2})+ie(\frac{1}{\sqrt2})}{2i}=\frac{\frac{1}{\sqrt2}(e^{-1}-e)+\frac{i}{\sqrt2}(e^{-1}+e)}{2i}$$

$$=\frac{-i}{2\sqrt2}(e^{-1}-e)+\frac{1}{2\sqrt2}(e^{-1}+e)=\frac{1}{2\sqrt2}(e+e^{-1})+i\left(\frac{e-e^{-1}}{2\sqrt2}\right)$$

3) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}=\dfrac{(\frac{1}{\sqrt2}+i\frac{1}{\sqrt2})+(\frac{1}{\sqrt2}-i\frac{1}{\sqrt2})}{2}=\dfrac{1}{\sqrt2}$

Subject ______ التاريخ :

Date ______ الموضوع :

4] $\cos(0) = \dfrac{e^{i(0)} + e^{-i(0)}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

تمرين: حل المعادلات التالية في $\mathbb{C}$:

I] $\sin z = 0$

$\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{iz} = e^{-iz}$

$\Rightarrow e^{2iz} = 1 \Rightarrow 2iz = \ln|1| + i(0 + 2\pi k) \quad : k \in \mathbb{Z}$

$= i(2\pi k) \quad : k \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow z = \pi k \quad : k \in \mathbb{Z}$

2] $\cos z = \frac{1}{2}$

$\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 1$ (نضرب بـ e^{iz})

$e^{2zi} - e^{iz} + 1 = 0$

نفرض $w = e^{iz}$

$\Rightarrow w^2 - w + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(1) = -3 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} w_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{z = \frac{\pi}{3} + 2\pi k} : k \in \mathbb{Z} \\ w_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{z = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k} : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3] $\cos z = 2$

$\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \qquad e^{2zi} - 4e^{iz} + 1 = 0$ (نضرب بـ $2e^{iz}$)

نفرض $e^{iz} = w$ فيكون $\qquad w^2 - 4w + 1 = 0$

$\Delta = 16 - 4(1)(1) = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow w_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})e^{i0}$

نفرض $z = x+iy$ فيكون وبالمطابقة

$\Rightarrow e^{iz} = e^{ix}\cdot e^{-y} = (2+\sqrt{3})e^{i0}$

$\Rightarrow \begin{cases} e^{-y} = 2+\sqrt{3} \rightarrow y = -\ln(2+\sqrt{3}) \\ x = 0+2\pi K \quad ; K \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow z_1 = 2\pi K - i\ln(2+\sqrt{3}) \quad ; K \in \mathbb{Z}$

$w_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})e^{i0}$

$\Rightarrow \begin{cases} e^{-y} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow y = -\ln(2+\sqrt{3}) \\ x = 0+2\pi K \quad ; K \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow z_2 = 2\pi K - i\ln(2+\sqrt{3})$

وظيفة: اكتب الأعداد العقدية التالية بالشكل الجبري.

$\boxed{1}\ \cos(\pi - i)$ $\quad\quad$ $\boxed{2}\ \tan(\frac{\pi}{3})$

حل المعادلة التالية في $\mathbb{C}$: $\tan z = 1$

انتهت المحاضرة الثالثة والعشرون 23

الحل/ الوظيفة/

$\boxed{1}\ \cos(\pi - i) = \frac{e^{i(\pi-i)} + e^{-i(\pi-i)}}{2} = \frac{e^{i\pi}\cdot e + e^{-i\pi}\cdot e^{-1}}{2}$

$= \frac{e(\cos\pi + i\sin\pi) + e^{-1}(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))}{2} = \frac{e(-1+0) + e^{-1}(-1+0)}{2}$

$\Rightarrow \cos(\pi - i) = -\frac{1}{2}(e + e^{-1})$

$\boxed{2}\ \tan(\frac{\pi}{3}) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i(-\frac{\pi}{3})}}{e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i(-\frac{\pi}{3})}}$

$= \frac{1}{i}\,\frac{(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) - (\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))}{(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) + (\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))} = \frac{1}{i}\,\frac{(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}) - (\frac{1}{2} + i(-\frac{\sqrt{3}}{2}))}{(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})}$

$= -i\left(\frac{1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3}}\right) = -i\left(\frac{2i\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$ #

حل المعادلة التالية في $\mathbb{C}$:

الحل

$$\tan z = 1$$

$$\frac{1}{i}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = 1$$

$$\Rightarrow e^{iz}-e^{-iz} = i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$$

$$\Rightarrow (e^{iz})^2 - 1 = i\left((e^{iz})^2+1\right)$$ (نضرب الطرفين بـ (e^{iz}))

$$\Rightarrow (e^{iz})^2 - i(e^{iz})^2 = 1+i$$

$$\Rightarrow (e^{iz})^2(1-i) = 1+i$$

$$\Rightarrow (e^{iz})^2 = \frac{1+i}{1-i}$$

$$(e^{iz})^2 = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

نفرض $e^{iz} = w$ نجد أن $w^2 = i$

ونفرض $w = x+iy$ عندئذ

$$w^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 & (1) \\ 2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2y} & (2) \end{cases}$$

نعوض (2) في (1)

$$\frac{1}{4y^2} = y^2 \Rightarrow 4y^4 = 1 \Rightarrow 4y^4 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2y^2-1)(2y^2+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y^2 = -\frac{1}{2} \quad \text{مرفوض في } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1 = +\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow w_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow e^{iz} = w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{z_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k}$$

$$e^{iz} = w_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i = e^{i\frac{5\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{z_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k}$$