Definition 1.30. *A matrix is said to be an M-matrix if it satisfies the following four properties:*

1. $a_{i,i} > 0$ *for* $i = 1, \ldots, n$.
2. $a_{i,j} \leq 0$ *for* $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.
3. *A is nonsingular.*
4. $A^{-1} \geq 0$.

In reality, the four conditions in the above definition are somewhat redundant and equivalent conditions that are more rigorous will be given later. Let A be any matrix that satisfies properties (1) and (2) in the above definition and let D be the diagonal of A. Since $D > 0$,

$$A = D - (D - A) = D\left(I - (I - D^{-1}A)\right).$$

Now define

$$B \equiv I - D^{-1}A.$$

Using the previous theorem, $I - B = D^{-1}A$ is nonsingular and $(I - B)^{-1} = A^{-1}D \geq 0$ iff $\rho(B) < 1$. It is now easy to see that conditions (3) and (4) of Definition 1.30 can be replaced with the condition $\rho(B) < 1$.

Theorem 1.31. *Let a matrix A be given such that*

1. $a_{i,i} > 0$ *for* $i = 1, \ldots, n$;
2. $a_{i,j} \leq 0$ *for* $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Then A is an M-matrix iff

3. $\rho(B) < 1$, *where* $B = I - D^{-1}A$.

Proof. From the above argument, an immediate application of Theorem 1.29 shows that properties (3) and (4) of Definition 1.30 are equivalent to $\rho(B) < 1$, where $B = I - C$ and $C = D^{-1}A$. In addition, C is nonsingular iff A is and C^{-1} is nonnegative iff A is. □

The next theorem shows that condition (1) of Definition 1.30 is implied by its other three conditions.

Theorem 1.32. *Let a matrix A be given such that*

1. $a_{i,j} \leq 0$ *for* $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$;
2. *A is nonsingular;*
3. $A^{-1} \geq 0$.

Then

4. $a_{i,i} > 0$ *for* $i = 1, \ldots, n$; *i.e., A is an M-matrix;*
5. $\rho(B) < 1$, *where* $B = I - D^{-1}A$.

Proof. Define $C \equiv A^{-1}$. Writing that $(AC)_{ii} = 1$ yields

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{ki} = 1,$$

which gives

$$a_{ii}c_{ii} = 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{ik}c_{ki}.$$

Since $a_{ik}c_{ki} \leq 0$ for all k, the right-hand side is not less than 1 and, since $c_{ii} \geq 0$, then $a_{ii} > 0$. The second part of the result now follows immediately from an application of Theorem 1.31. □

Finally, this useful result follows.

Theorem 1.33. *Let A, B be two matrices that satisfy*

1. $A \leq B$,
2. $b_{ij} \leq 0$ *for all* $i \neq j$.

Then, if A is an M-matrix, so is the matrix B.

Proof. Assume that A is an M-matrix and let D_X denote the diagonal of a matrix X. The matrix D_B is positive because

$$D_B \geq D_A > 0.$$

Consider now the matrix $I - D_B^{-1}B$. Since $A \leq B$, then

$$D_A - A \geq D_B - B \geq O,$$

which, upon multiplying through by D_A^{-1}, yields

$$I - D_A^{-1}A \geq D_A^{-1}(D_B - B) \geq D_B^{-1}(D_B - B) = I - D_B^{-1}B \geq O.$$

Since the matrices $I - D_B^{-1}B$ and $I - D_A^{-1}A$ are nonnegative, Theorems 1.28 and 1.3 imply that

$$\rho(I - D_B^{-1}B) \leq \rho(I - D_A^{-1}A) < 1.$$

This establishes the result by using Theorem 1.31 once again. □

1.11 Positive Definite Matrices

A *real* matrix is said to be *positive definite* or *positive real* if

$$(Au, u) > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \ u \neq 0. \tag{1.4}$$

It must be emphasized that this definition is only useful when formulated entirely for r variables. Indeed, if u were not restricted to be real, then assuming that (Au, u) is r for all u complex would imply that A is Hermitian; see Exercise 15. If, in addition to

definition stated by (1.48), A is symmetric (real), then A is said to be *symmetric positive definite* (SPD). Similarly, if A is Hermitian, then A is said to be *Hermitian positive definite* (HPD). Some properties of HPD matrices were seen in Section 1.9, in particular with regard to their eigenvalues. Now the more general case where A is non-Hermitian and positive definite is considered.

We begin with the observation that any square matrix (real or complex) can be decomposed as

$$A = H + iS, \tag{1.48}$$

in which

$$H = \frac{1}{2}(A + A^H), \tag{1.49}$$

$$S = \frac{1}{2i}(A - A^H). \tag{1.50}$$

Note that both H and S are Hermitian while the matrix iS in the decomposition (1.48) is skew Hermitian. The matrix H in the decomposition is called the *Hermitian part* of A, while the matrix iS is the *skew-Hermitian part* of A. The above decomposition is the analogue of the decomposition of a complex number z into $z = x + iy$:

$$x = \Re e(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \Im m(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

When A is real and u is a real vector, then (Au, u) is real and, as a result, the decomposition (1.48) immediately gives the equality

$$(Au, u) = (Hu, u). \tag{1.51}$$

This results in the following theorem.

Theorem 1.34. *Let A be a real positive definite matrix. Then A is nonsingular. In addition, there exists a scalar $\alpha > 0$ such that*

$$(Au, u) \geq \alpha \|u\|_2^2 \tag{1.52}$$

for any real vector u.

Proof. The first statement is an immediate consequence of the definition of positive definiteness. Indeed, if A were singular, then there would be a nonzero vector such that $Au = 0$ and, as a result, $(Au, u) = 0$ for this vector, which would contradict (1.47). We now prove the second part of the theorem. From (1.51) and the fact that A is positive definite, we conclude that H is HPD. Hence, from (1.39), based on the min-max theorem, we get

$$\min_{u \neq 0} \frac{(Au, u)}{(u, u)} = \min_{u \neq 0} \frac{(Hu, u)}{(u, u)} \geq \lambda_{min}(H) > 0.$$

Taking $\alpha \equiv \lambda_{min}(H)$ yields the desired inequality (1.52). □

A simple yet important result that locates the eigenvalues of A in terms of the spectra of H and S can now be proved.

Theorem 1.35. *Let A be any square (possibly complex) matrix and let $H = \frac{1}{2}(A + A^H)$ and $S = \frac{1}{2i}(A - A^H)$. Then any eigenvalue λ_j of A is such that*

$$\lambda_{min}(H) \leq \Re e(\lambda_j) \leq \lambda_{max}(H), \tag{1.53}$$

$$\lambda_{min}(S) \leq \Im m(\lambda_j) \leq \lambda_{max}(S). \tag{1.54}$$

Proof. When the decomposition (1.48) is applied to the Rayleigh quotient of the eigenvector u_j associated with λ_j, we obtain

$$\lambda_j = (Au_j, u_j) = (Hu_j, u_j) + i(Su_j, u_j), \tag{1.55}$$

assuming that $\|u_j\|_2 = 1$. This leads to

$$\Re e(\lambda_j) = (Hu_j, u_j),$$
$$\Im m(\lambda_j) = (Su_j, u_j).$$

The result follows using properties established in Section 1.9.

Thus, the eigenvalues of a matrix are contained in a rectangle defined by the eigenvalues of its Hermitian and non-Hermitian parts. In the particular case where A is real, then iS is skew Hermitian and its eigenvalues form a set that is symmetric with respect to the real axis in the complex plane. Indeed, in this case, iS is real and its eigenvalues come in conjugate pairs.

Note that all the arguments herein are based on the field of values and, therefore, they provide ways to localize the eigenvalues of A from knowledge of the field of values. However, this approximation can be inaccurate in some cases.

Example 1.3. Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^4 & 1 \end{pmatrix}.$$

The eigenvalues of A are -99 and 101. Those of H are $1 \pm (10^4 + 1)/2$ and those of S are $\pm i(10^4 - 1)/2$.

When a matrix B is SPD, the mapping

$$x, y \quad \rightarrow \quad (x, y)_B \equiv (Bx, y) \tag{1.56}$$

from $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ to $\mathbf{C}$ is a proper inner product on $\mathbf{C}^n$ in the sense defined in Section 1.4. The associated norm is often referred to as the *energy norm* or *A-norm*. Sometimes, it is possible to find an appropriate HPD matrix B that makes a given matrix A Hermitian, i.e., such that

$$(Ax, y)_B = (x, Ay)_B \quad \forall\, x, y,$$

although A is a non-Hermitian matrix with respect to the Euclidean inner product. The simplest examples are $A = B^{-1}C$ and $A = CB$, where C is Hermitian and B is HPD.

" المحاضرة الثالثة عشر "

" الصفحة 28 :

حالة التعريف 1.30 :

يقال عن مصفوفة أنها مصفوفة - M إذا حققت الشروط التالية:

1) $a_{ii} > 0$ for $i = 1, \dots, n$ عناصر القطر الرئيسي موجبة تماماً

2) $a_{ij} \leq 0$ for $i \neq j$, $i,j = 1, \dots, n$ عناصر خارج القطر الرئيسي غير موجبة

3) A غير شاذة

4) $A^{-1} \geq 0$

في الحقيقة الشروط الأربعة في التعريف السابق هي مكررة بمعنى أن الشرط الثالث والشروط الثلاثة الأخيرة متكافئة".

لتكن A مصفوفة ما تحقق الشرطين ① و ② من التعريف السابق ولتكن D مصفوفة قطرية التي عناصر قطرها الرئيسي هي عناصر القطر الرئيسي لـ A. حيث

$D > 0$

$$A = D - (D - A) = D(I - (I - D^{-1}A))$$

الآن نعرف:

$$B = I - D^{-1}A$$

باستخدام النظرية السابقة فإن $I - B = D^{-1}A$ هي مصفوفة غير شاذة. كما أن $(I - B)^{-1} = A^{-1}D \geq 0$ إذا وفقط إذا $\rho(B) < 1$.

أصبح الآن من السهل ملاحظة أنه يمكن استبدال الشرطين الثالث والرابع من التعريف بالشرط $\rho(B) < 1$.

حالة نظرية 1.31 :

لتكن A مصفوفة معطاة:

1) $a_{ii} > 0$ for $i = 1, \dots, n$

2) $a_{ij} \leq 0$ for $i = 1, \dots, n$

then A is an M-matrix iff

3) $\rho(B) < 1$ where $B = I - D^{-1}A$

البرهان نترك

لتكن A مصفوفة مصفاة بالشكل:

1) $a_{ij} \le 0$ for $i \neq j$ $\quad i,j = 1,\dots,n$

2) A مصفوفة شاذة

3) $A^{-1} \ge 0$

عندها:

4) $a_{ii} > 0$ for $i = 1,\dots,n$, (i.e) A is an M-matrix

تقتضي

5) $\rho(B) < 1$ where $B = I - B^{-1}A$

عندما

البرهان في مطلوب

الصفحة 122:

نظرية 1.33:

لتكن A و B مصفوفتان بحيث:

1) $A \le B$

2) $b_{ij} \le 0$ for all $i \neq j$ ← الشرط الأخير

عندما تكون المصفوفة A مصفوفة M بحيث B تكون أكبر من A

البرهان تحذف.

حالم 1.11 المصفوفات المعرفة الموجبة:

يقال عن المصفوفة الحقيقية A أنها معرفة أو معرفة موجبة إذا تحقق

$$(Au,u) > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n,\ u \neq 0$$

يجب أن نذكر أن هذا التعريف يكون مناسبة إذا كانت A متناظرة بالنسبة للمتغيرات الحقيقية.

في الحقيقة لو أخذنا أن المتغير u متغير عقدي عندها يكون (Au,u) حقيقي لكل عدد عقدي u وهذا يؤدي إلى أن المصفوفة A تكون هرميتية.

P.D) لتكن المصفوفة A مصفوفة معرفة موجبة إذا تحقق

$$(Ax,x) = x^T Ax \quad : x \neq 0$$

$$< Ax, x > 0 \quad : x \neq 0 \qquad \text{S.P.D}$$

"الصفة 3o"

بالإضافة للتمرين إذا كانت المصفوفة A متناظرة (هيرميتية) عندها نقول عن المصفوفة A أنها مصفوفة موجبة متناظرة.

وبشكل مشابه، إذا كانت المصفوفة A هرميتية عندها نقول عن المصفوفة A أنها مصفوفة موجبة هرميتية.

وهناك خواص للمصفوفات HPD سنذكر منها الفصل 9.1

الآن الحالة الأعم عندما تكون المصفوفة A غير هرميتية ولكنها مصفوفة موجبة.

سنبدأ الآن بملاحظة أن أي مصفوفة مربعة (حقيقية أو عقدية) تحلل خطيا إلى المسألة السابقة.

$$A = \underbrace{H}_{\text{جزء هرميتي}} + i\underbrace{S}_{\text{جزء هرميتي}}$$

in which.

$$H = \frac{1}{2}(A + A^H)$$

$$S = \frac{1}{2i}(A - A^H)$$

لاحظ أن كلا من H و S هي مصفوفة هرميتية. بينما المصفوفة iS هي هرميتية متخالفة. المصفوفة H في التحليل السابقة هي الجزء الهرميتي للمصفوفة A. بينما المصفوفة iS تمثل الجزء الهرميتي المتخالف للمصفوفة A

إن التحليل السابق يشابه لتحليل عدد عقدي إلى جزئين (حقيقي وتخيلي):

$$z = x + iy$$

$$x = \mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$y = \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

عندما تكون المصفوفة A حقيقية وتكون الثنائية "u حقيقية" عندئذ نكتب: (Au, u).

حقيقية كذلك مباشرة للتحليل.

التحليل يعيد مباشرة المساواة

$$(Au, u) = (Hu, u)$$

هذه النتيجة في النظرية التالية:

نتيجة 1.34 :

لتكن A مصفوفة حقيقية مربعة غير متناظرة بالإضافة لذلك يوجد عدد $\alpha > 0$ حقيقي

$$(Au, u) \geq \alpha \|u\|_2^2$$

من أجل أي u عدد حقيقي.

البرهان محذوف.

" العضة 31 "

مبرهنة (نتيجة) 1.35 :

لتكن A أي مصفوفة مربعة (من المكن أن تكون عقدية) ولكن $H = \frac{1}{2}(A + A^H)$ و $S = \frac{1}{2i}(A - A^H)$ عندما تكون أي قيمة ذاتية لـ A للمصفوفة A حقيقية

$$\lambda_{min}(H) \leq Re(\lambda_j) \leq \lambda_{max}(H)$$

$$\lambda_{min}(S) \leq Im(\lambda_j) \leq \lambda_{max}(S)$$

البرهان محذوف.

هكذا فإن القيمة الذاتية لمصفوفة تكون محققة في متباينة معرفة من خلال القيم الذاتية لجزأي الهرمية مساعد هرميتي.

في الحالة الخاصة عندما تكون A مصفوفة حقيقية فإن المصفوفة تكون هرمية متناظرة فتكون القيم الذاتية تشكل مجموعة متناظرة بالنسبة للمحور الحقيقي في المستوي العقدي.

في الحقيقة فإن هذه الحالة فإن المصفوفة تكون حقيقية وحقيقة الذاتية فإن تشكل ثنائيات مترافقة.

المثال محذوف.

" التمرين المحلول الثلاثة عشر "