المعادلات التفاضلية الخطية بأشكال مختلفة والتي ترد إلى معادلات خطية بمعاملات ثابتة.

1] معادلة أولر: هذه المعادلة لها الشكل التالي

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} y^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x)$$

وإذا كانت $f(x)=0 \Leftarrow$

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

معادلة متجانسة (بمعاملات ثابتة)

لإيجاد الحل العام نفرض تغير متحول $x = e^t$.

فتصبح على الشكل التالي

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$x \cdot y' = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \boxed{x \cdot y' = y'_t}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$x^2 y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

$$\boxed{x^2 y'' = y''_t - y'_t}$$

وهكذا نستمر بالاشتقاق

Subject : .... / /

$$x = e^{t} \Rightarrow t = \ln x$$

$$\Downarrow \; dx = e^{t} dt \Rightarrow e^{t} = \frac{dx}{dt}$$

$$e^{-t} = \frac{dt}{dx}$$

التعويض العكسي:

$$x^{K} y^{(K)} = B_K \frac{d^{K} y}{dt^{K}} + B_{K-1} \frac{d^{K-1} y}{dt^{K-1}} + \dots + B_1 \frac{dy}{dt}$$

حيث $B_1, B_2, \dots, B_n$ ثوابت

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

هذه من نوع معادلة أويلر لذلك نفرض أن $x = e^{t}$ ومنه

$$x^2 y'' = y''_t - y'_t$$

$$xy' = y'_t$$

$\Rightarrow$ نعوض بالمعادلة التفاضلية

$$y''_t - y'_t - 2y'_t + 2y = 0$$

$$y''_t - 3y'_t + 2y = 0$$

معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة ، المعادلة المميزة لها

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_2 = 2 \quad , \lambda_1 = 1$$

$$y_t = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$$

$$\boxed{y = C_1 x + C_2 x^2}$$

Subject: .... / /

مثال: $2x^2 y'' + x y' - y = 0$

$x^2 y'' = y''_t - y'_t$

نعوض بالمعادلة الناتجة $x y' = y'_t$

$2y''_t - 2y'_t + y'_t - y = 0$

$$\boxed{2y''_t - y'_t - y = 0}$$

وتكمل الحل.

نوجد المعادلة المميزة
ونوجد جذورها
الحل العام حسب
نوع الجذور

مثال: أوجد الحل العام

$x^2 y'' + 3xy' + y = x$

① الحل العام بدون طرف ثاني

$x^2 y'' + 3xy' + y = 0$

$y''_t - y'_t + 3y'_t + y = 0$

$y''_t + 2y'_t + y = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ مكرر

لا تنسى
الرجوع بالتغيير
للأصل

الحل العام $\boxed{y_t = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}}$

$y''_t + 2y'_t + y = e^t$

$\alpha = 1$ ليس جذر للمعادلة المميزة

$y_p = A e^t \quad , y'_p = A e^t \quad , y'' = A e^t$

نعوض بالمعادلة مع طرف ثاني

$A e^t + 2A e^t + A e^t = e^t$

$4A e^t = e^t \Rightarrow \boxed{A = 1/4}$

Subject : .... / /

$$\Rightarrow \boxed{y_p = \tfrac{1}{4} e^{t}}$$ الحل الخاص بحرف t

الحل العام لمعادلة اولر

$$\boxed{Y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \frac{1}{4} e^{t}}$$

$$\boxed{Y = c_1 \left(\frac{1}{x}\right) + c_2 \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{4}}$$

وظيفة:

$\boxed{1}$ $x^3 y''' - 2 x y' + 4y = 0$ (*)

$\boxed{2}$ $x^2 y'' + 6 x y' + 6x = \frac{1}{x^2}$

حل كلاً مما يلي من المعادلات التفاضلية

حل (1) نلاحظ ان هذه المعادلة هي معادلة اولر

نفرض $x = e^t$

نلاحظ

$x y' = y'_t$

$x^3 y''' = y'''_t - 3y''_t + 2y'_t$

نعوض في (*)

$y'''_t - 3y''_t + 2y'_t - 2y'_t + 4y = 0$

$y'''_t - 3y''_t + 4y = 0$ $\boxed{1}$

معادلة خطية ذات امثال ثابتة

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$

نلاحظ ان $\lambda = -1$ جذر للمعادلة

$$\begin{array}{r|l} & \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ \hline \lambda + 1 & \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \\ & \lambda^3 + \lambda^2 \\ \hline & -4\lambda^2 + 4 \\ & -4\lambda^2 - 4\lambda \\ \hline & 4 + 4\lambda \\ & 4 + 4\lambda \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$

$(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ جذر مضاعف

فيكون الحل العام للمعادلة $\boxed{1}$

$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t}$

$y = \frac{1}{x} c_1 + x^2 c_2 + c_3 (\ln x) x^2$

هذا الحل تم في محاضرة العملي

2014 / 12 / 17