# المحاضرة العشرون :

## تعريف (الزمرة الجزئية السيلوفية) :

لتكن $G$ زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي $p$ ولنفرض أن: $p^n$ يقسم مرتبة الزمرة $G$ ، وأن: $p^{n+1}$ لا يقسم مرتبة الزمرة $G$ عندئذ نسمي كل زمرة جزئية $H$ في $G$ مرتبتها $p^n$ بأنها $p$ - زمرة جزئية سيلوفية في $G$.

مثال:

لتكن: $(G:1)=3^2.2^3.5.7^6$ يوجد في: $G$ 3- زمرة مرتبتها 3 ويوجد: 3- زمرة مرتبتها 9.

وبالنسبة للزمر الجزئية السيلوفية فهي:

3- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 9

2- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 8.

5- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها 5.

7- زمرة جزئية سيلوفية مرتبتها $7^6$.

## مبرهنة كوشي :

كل زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي $p$ تحوي عنصر مرتبته $p$ وبالتالي تحوي زمرة جزئية مرتبتها $p$.

نتيجة :

كل $p$- زمرة جزئية في زمرة منتهية محتواة في: $p$- زمرة جزئية سيلوفية

مبرهنة :

لتكن: $G$ زمرة ولتكن $H$ زمرة جزئية في $G$ عندئذ:

1) المجموعة: $x.H.x^{-1}$ زمرة جزئية في $G$ لأجل كل $x\in G$ ونسمي الزمرة الجزئية المترافقة مع $H$.

2) المجموعة $N(H)=\{x ; x\in G, x.H.x^{-1}=H\}$ زمرة جزئية في $G$ تسمى مركز الزمرة الجزئية $H$.

الإثبات:

1) لنبرهن أنّ $x.H.x^{-1}$ غير خالية، حيث نلاحظ أنّ: $e=x.e.x^{-1}=e$

ومنه: $e\in x.H.x^{-1}$ ومنه: $x.H.x^{-1}$ غير خالية.

ولكي تكون المجموعة: $x.H.x^{-1}$ زمرة جزئية يجب أن نبرهن أنّ:

$$\forall a,b\in x.H.x^{-1} : a.b^{-1}\in x.H.x^{-1}$$

لكن: $a,b\in x.H.x^{-1}$ ومنه يوجد: $h_1,h_2\in H$ بحيث:

$$a=x.h_1.x^{-1} \quad , b=x.h_2.x^{-1}$$

$$a.b^{-1}=(x.h_1.x^{-1}).(x.h_2.x^{-1})^{-1}=(x.h_1.x^{-1}).\underbrace{((x.h_2).x^{-1})^{-1}}$$

تذكير: $(a.b)^{-1}=b^{-1}.a^{-1}$

$$\Rightarrow a.b^{-1}=(x.h_1.x^{-1}).((x^{-1})^{-1}.(x.h_2)^{-1})=(x.h_1.x^{-1})(x.h_2^{-1}.x^{-1})$$

$$\Rightarrow a.b^{-1}=x.h_1.(x^{-1}.x)h_2^{-1}.x^{-1}=x.h_1.e.h_2^{-1}x^{-1}$$

$$\Rightarrow a.b^{-1}=x.h_1.h_2^{-1}.x^{-1}$$

بما أنّ $H$ زمرة جزئية في $G$ يكون: $h_1.h_2^{-1}\in H$ ومنه:

$$a.b^{-1}=x.h_1.h_2.x^{-1}\in x.H.x^{-1}$$

وبالتالي تكون: $x.H.x^{-1}$ زمرة جزئية في: $G$

2) أولاً لنبرهن أنّ $N(H)$ غير خالية، إنّ: $e\in N(H)$ وذلك لأنّ:

$$e.H.e^{-1}=H$$

كي تكون $N(H)$ زمرة جزئية في $G$ يجب أن نبرهن أنّ:

$$\forall a,b\in N(H) : a.b^{-1}\in N(H)$$

لكن: $a,b\in N(H)$ عندئذ: $a.H.a^{-1}=H, b.H.b^{-1}=H$

ولنبرهن أنّ: $a.b^{-1}\in N(H)$

$$a.b^{-1}.H.(a.b^{-1})^{-1}=a.b^{-1}.H.(b^{-1})^{-1}.a^{-1}$$

$$=a.b^{-1}.H.b.a^{-1}$$

لنبين أن: $b^{-1}\in N(H)$ ، لدينا: $b.H.b^{-1}=H$ نضرب من اليسار بمقلوب b فيكون: $H.b^{-1}=b^{-1}.H$

ومن ثم نضرب من اليمين ب: b فيكون: $H=b^{-1}.H.b$

وبذلك يكون: $b^{-1}\in N(H)$

ومنه:

$$a.b^{-1}.H.b.a^{-1}=a.H.a^{-1}=H$$

وبالتالي يكون: $a.b^{-1}\in N(H)$

ومنه فإن: $N(H)$ زمرة جزئية في $G$.

ملاحظة: لتكن $G$ زمرة ولتكن: $H$ زمرة جزئية في $G$ عندئذٍ:

1) الزمرة $H$ زمرة جزئية ناظمية في $N(H)$

2) الزمرة الجزئية $N(H)$ أعظمية في مجموعة الزمر الجزئية من $G$ والتي تكون $H$ ناظمية فيها.

الإثبات:

1) أياً كان: $a\in H$ فإن: $a.H.a^{-1}=H$ ومنه نجد أن: $a\in N(H)$ ومنه: $\{H\subseteq N(H)\}$ وهذا يبين أن $H$ زمرة جزئية في $N(H)$

• لنبرهن أن: $H$ ناظمية في $N(H)$

ليكن: $a\in N(H)$ عندئذٍ: $a.Ha^{-1}=H$ وذلك حسب تعريف الزمرة: $N(H)$

ومنه فإن الزمرة $H$ جزئية ناظمية في $N(H)$

2) لنأخذ المجموعة: $L=\{M;$ $M$ زمرة جزئية في $G$ وأن $H$ ناظمية في $M\}$

واضح أن: $L\neq\phi$ لأن: $N(H)\in L$

ليكن: $K\in L$ بحيث: $\{N(H)\subseteq K\}$ ، ليكن: $b\in K$ عندئذٍ:

بما أن: $H$ ناظمية في $K$ فإن: $b.Hb^{-1}=H$ ومنه $b\in N(H)$

وبالتالي: $\{K\subseteq N(H)\}$

ومن الاحتوائين: $K = N(H)$

.مما يبين أنّ: $N(H)$ أعظمي في $L$ بالنسبة لعلاقة الاحتواء.

**مبرهنة:** لتكن $G$ زمرة منتهية و $K$ هي: $P$ - زمرة جزئية سيلوفية في $G$ مرتبتها $p^n$، عندئذ:

1) إذا كانت: $H$ هي: $P$ - زمرة جزئية في $G$ فإنّ: $H \cap N(K) = H \cap K$

2) أي زمرة جزئية في $G$ ومترافقة مع: $K$ هي: $P$ - زمرة جزئية سيلوفية في $G$.

**الإثبات:**

1) لدينا: $K \subseteq H$ ومنه: $H \cap K \subseteq H \cap N(H)$ ولنفرض أنّ:
$H_1 = H \cap N(H)$ واضح أنّ: $H_1$ زمرة جزئية في $H$ وهي أيضاً
$P$ - زمرة (حسب مبرهنة كوشي)، لدينا $K$ زمرة جزئية ناظمية في
$N(K)$ ومنه فإنّ: $H_1 . K$ زمرة جزئية في: $N(K)$ وزمرة الخارج:
$H_1.K / K$ معرفة وتحقق حسب مبرهنة التماثل الثانية:
$H_1.K/K \cong H_1/H_1 \cap K$ ومنه:

$$(H_1.K : K) = (H_1 : H_1 \cap K_1)$$
$$(H_1 : 1) = (H_1 : H_1 \cap K)(H_1 \cap K : 1)$$

وهذا يبين أنّ:

$$(H_1.K : K) = (H_1 : H_1 \cap K) = p^r$$
$$(H_1.K : 1) = (H_1.K : K)(K : 1) \Rightarrow (H_1.K : 1) = p^r . p^n = p^{n+r}$$

وهذا يبين لنا أنّ: $H_1.K$ عبارة عن: $P$ - زمرة جزئية سيلوفية
تحوي $K$، وبما أنّ: $K$ هي: $P$ - زمرة جزئية أعظمية في $G$ فإنّ:

$$H_1 . K = K$$

ومنه: $H_1 \subseteq H_1.K = K$ وكما أنّ: $H_1 = H \cap N(H)$ فإنّ: $H_1 \subseteq H$

وبالتالي: $H_1 \subseteq H \cap K$

أي: $H \cap N(H) \subseteq H \cap K$ ومما سبق يكون: $H \cap N(H) = H \cap K$

2). لتكن : M زمرة جزئية مترافقة عندئذ يوجد : $a \in G$ بحيث :

$$M = a.K.a^{-1}$$

إن التطبيق : $f: K \longrightarrow a.K.a^{-1}$ المعرف بالشكل :

$$\forall x \in K : f(x) = a x a^{-1}$$

وهذا التطبيق تقابل ومنه :

$$(K : 1) = (aKa^{-1} : 1)$$

وهذا يبين أن الزمرة : $a.K.a^{-1}$ جزئية سيلوفية في G.

---

مبرهنة : لتكن : G زمرة منتهية و K هي : P-زمرة جزئية سيلوفية في G مرتبتها $P^n$ عندئذ :

1). عدد جميع الزمر المترافقة مع : K يساوي $(G : N(K))$.

2). العددان : $(G : N(K))$ و : P أوليان فيما بينهما.

الإثبات :

1). لنفرض أنّ : M هي مجموعة كل الزمر الجزئية في G المترافقة مع K.

وإنّ : $M_L$ مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية : $N(K)$ في G ولنعرف التطبيق :

$$g : M_L \longrightarrow M$$

$$\forall x N(K) \in M_L : g(x.N(K)) = x.K.x^{-1}$$

أثبت أن : g تطبيق تقابل "وظيفة".

2). حسب الفرض إنّ : $(G:1) = m.P^n$ حيث : m عدد صحيح لا يقبل القسمة على P وأنّ :

إنّ : $(G : 1) = (G : N(K)).(N(K) : 1)$

وكذلك : $(G : K) = (G : N(K)).(N(K) : 1)$

وذلك لأنّ :

$$K \subseteq N(K) \subseteq G$$

$$(G:1)=(G:K).(K:1)$$
$$(N(K):1)=(N(K):K)(K:1)$$
$$(G:K)=\frac{(G:1)}{(K:1)}=\frac{(G:N(K))(N(K):1)}{(K:1)}$$
$$=\frac{(G:N(K))(N(K):K)(K:1)}{(K:1)}$$
$$\Rightarrow (G:K)=(G:N(K)).(N(K):1)$$

$$(G:1)=(G:K)(K:1)$$
$$m.p^n=(G:K).p^n \Rightarrow (G:K)=m$$
إذاً:
$$(G:N(K))(N(K):K)=m$$
وبما أنّ: $m$ لا يقبل القسمة على $p$ فإنّ: $(G:N(K))$ لا يقبل القسمة على $p$ ومنه العددان $(G:N(K))$ و: $p$ أوليان فيما بينهما.

مبرهنة سيلوف الثانية:
في أي زمرة منتهية كل: $p$- زمرة محتواة في: $p$- زمرة جزئية سيلوفية

مبرهنة سيلوف الثالثة:
لتكن: $G$ زمرة و $p$ عدداً أولياً عندئذٍ:
1. كل: $p$- زمرتين سيلوفيتين مترافقتين.
2. عدد كل الـ: $p$ - زمر الجزئية السيلوفية في $G$ يساوي: $1+K.p$ ويقسم مرتبة $G$.

مبرهنة:
لتكن: $G$ زمرة منتهية و $H$ زمرة جزئية في: $G$ الشروط الآتية متكافئة:
1. $H$ زمرة جزئية ناظمية في $G$.
2. $G$ تحوي: $p$- زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط هي: $H$

انتهت المحاضرة.