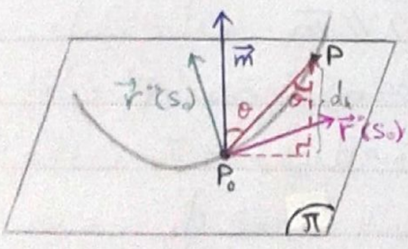
المستوي الملاصق لمنحنٍ :

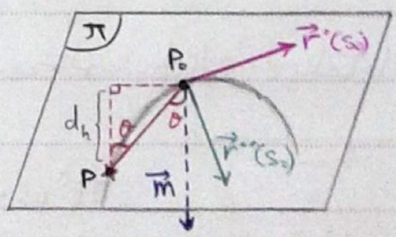
تعريف: ليكن ℓ منحنياً ما ، وليكن P_0 نقطة منه .
نقول عن المستوي الذي له تلامس من مرتبة عليا (من المرتبة الثانية على الأقل) مع المنحني في P_0 (في حال وجوده) إنه المستوي الملاصق لِ ℓ عند P_0 .

مبرهنة:
ليكن ℓ منحنياً ما ، وليكن $s \longrightarrow \vec{r}(s)$ تمثيلاً طبيعياً له من الصف C_2 على الأقل
وليكن P_0 نقطة نظامية لِ ℓ مقابلة لقيمة الوسيط الطبيعي s_0 .
فإذا كان $\vec{r}''(s_0)$ غير معدوم ، عندئذٍ يوجد مستوٍ ملاصق وحيد للمنحني ℓ في P_0 .

الإثبات:
إن $\vec{r}'(s_0)\neq 0$ لأن P_0 نقطة نظامية ، كما أن $\vec{r}''(s_0)\neq 0$ فرضاً .
إن $\vec{r}'(s_0)\perp\vec{r}''(s_0)$ لأن $\vec{r}'(s_0)$ هو متجه واحدة متغير (ثابت بالطويلة) فيكون مشتقه معامداً له .
وبالتالي فالمتجهان $\vec{r}'(s_0) , \vec{r}''(s_0)$ غير مرتبطين خطياً ، ومنه يتعين مستوٍ وحيد π يحوي هذين المتجهين . لنأخذ $\vec{m}$ متجه واحدة الجداء الخارجي $\vec{r}'(s_0)\wedge\vec{r}''(s_0)$ ، عندئذٍ سيكون هذا المستوي ماراً من P_0 ومعامداً للمتجه $\vec{m}$.
فإذا كانت Q نقطة من هذا المستوي ، وكان $\vec{R}$ متجه موضعها فستكون معادلة المستوي π بالشكل:
$$(\vec{R}-\vec{r}(s_0)).\vec{m}=0$$
ولنثبت أن هذا المستوي هو مستوٍ ملاصق للمنحني ℓ في P_0 .

- لتكن P نقطة متحركة على المنحني ، قيمة الوسيط الطبيعي المقابلة لها هي s .
لنأخذ الزاوية $\theta=(\widehat{\vec{P_0P},\vec{m}})$





نعلم أن المتجه $\vec{r}^{\cdot\cdot}(s_0)$ يتجه دوماً نحو جهة تقعر المنحني في جوار p_0 ، ومنه فإن الزاوية θ في جوار p_0 ستكون حادة دوماً أي أن $\cos\theta$ موجب دوماً.
وسيكون بعد النقطة p عن المستوي π هو:

$$d_h = \|\overrightarrow{P_0P}\| \cdot \cos\theta$$

$$d_h = \|\overrightarrow{P_0P}\| \cdot \|\vec{m}\| \cdot \cos\theta = \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{m}$$

$$d_h = [\vec{r}(s) - \vec{r}(s_0)] \cdot \vec{m}$$

ولكن حسب نشر تايلور من المرتبة الثانية في جوار p_0 :

$$\vec{r}(s) - \vec{r}(s_0) = h \cdot \vec{r}^{\cdot}(s_0) + \frac{h^2}{2!} \cdot \vec{r}^{\cdot\cdot}(s_0) + o(h^2)$$

$$\Longrightarrow d_h = h \cdot \vec{r}^{\cdot}(s_0) \cdot \vec{m} + \frac{h^2}{2!} \vec{r}^{\cdot\cdot}(s_0) \cdot \vec{m} + o(h^2) \cdot \vec{m}$$

ولكن:

$$\vec{r}^{\cdot}(s_0) \perp \vec{m} \Longrightarrow \vec{r}^{\cdot}(s_0) \cdot \vec{m} = 0$$

$$\vec{r}^{\cdot\cdot}(s_0) \perp \vec{m} \Longrightarrow \vec{r}^{\cdot\cdot}(s_0) \cdot \vec{m} = 0$$

$$\Longrightarrow d_h = o(h^2) \cdot \vec{m}$$

$$\Longrightarrow \frac{d_h}{h^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

وبالتالي يوجد تلامس من المرتبة الثانية على الأقل بين المنحني γ والمستوي π في p_0
$\Leftarrow$ يوجد تلامس من مرتبة عليا بينهما عند p_0 $\Leftarrow$ π مستوي ملاصق لِـ γ عند p_0.

_ لنفرض أنه يوجد π' مستوٍ ملاصق آخر للمنحني γ في النقطة p_0.
وليكن $\vec{\lambda}$ متجه واحدة عمودي على π' ، عندئذٍ ستكون معادلته بالشكل:

$$(\vec{R} - \vec{r}(s_0)) \cdot \vec{\lambda} = 0$$

ولنثبت أن $\vec{\lambda} \parallel \vec{m}$.

لتكن p' نقطة متحركة على المنحني γ ، وقيمة الوسيط الطبيعي المقابل لها هي s
وكون π' مستوي ملاصق فإن: $\frac{d'_h}{h^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$
حيث d'_h هو بعد النقطة p' عن المستوي π'
ولكن: $d'_h = [\vec{r}(s) - \vec{r}(s_0)] \cdot \vec{\lambda}$

وحسب نشر تايلور من المرتبة الثانية عند P_0 يكون:

$$\vec{r}(s)-\vec{r}(s_0)=h.\vec{r}^{\cdot}(s_0)+\frac{h^2}{2!}\vec{r}^{\cdot\cdot}(s_0)+o(h^2)$$

$$\Longrightarrow d_h^{\cdot}=h.\vec{r}^{\cdot}(s_0).\vec{\lambda}+\frac{h^2}{2!}\vec{r}^{\cdot\cdot}(s_0).\vec{\lambda}+o(h^2).\vec{\lambda} \quad \boxed{\star}$$

نقسم الطرفين على h ثم نأخذ نهاية الطرفين عندما $h\to 0$:

$$\underbrace{\frac{d_h^{\cdot}}{h}}_{\to 0}=\vec{r}^{\cdot}(s_0).\vec{\lambda}+\underbrace{\frac{h}{2!}\vec{r}^{\cdot\cdot}(s_0).\vec{\lambda}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{o(h^2)}{h}}_{\to 0}.\vec{\lambda}$$

عندما $h\to 0$

$$\Longrightarrow \vec{r}^{\cdot}(s_0).\vec{\lambda}=0 \Longrightarrow \vec{r}^{\cdot}(s_0)\perp\vec{\lambda}$$

نعوض في $\boxed{\star}$:

$$d_h^{\cdot}=\frac{h^2}{2!}\vec{r}^{\cdot\cdot}(s_0).\vec{\lambda}+o(h^2).\vec{\lambda}$$

نقسم الطرفين على h^2 ثم نأخذ نهاية الطرفين عندما $h\to 0$:

$$\underbrace{\frac{d_h^{\cdot}}{h^2}}_{\to 0}=\frac{1}{2!}\vec{r}^{\cdot\cdot}(s_0).\vec{\lambda}+\underbrace{\frac{o(h^2)}{h^2}}_{\to 0}.\vec{\lambda}$$

عندما $h\to 0$

$$\Longrightarrow \vec{r}^{\cdot\cdot}(s_0).\vec{\lambda}=0 \Longrightarrow \vec{r}^{\cdot\cdot}(s_0)\perp\vec{\lambda}$$

ومنه $\vec{\lambda}$ عمودي على كل من المتجهين $\vec{r}^{\cdot}(s_0)\,,\,\vec{r}^{\cdot\cdot}(s_0)$

ولكن لدينا $\vec{m}$ عمودي عليهما أيضاً $\Longleftarrow \vec{m}\,//\,\vec{\lambda}$

ومنه فالمستوي π' موازٍ للمستوي π.

وبما أن P_0 نقطة مشتركة بينهما فإن π' هو نفسه π.

$\Longleftarrow$ المستوي الملاصق يتعين بشكل وحيد.