المحاضرة الثامنة عشر :

الزمر التبديلية المنتهية :

مبرهنة : لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي p ، عندئذ يوجد في G عنصر x مرتبته p (واحد على الأقل).

الإثبات :

. لنفرض أن : $(G:1)=n$ وأن : $n=p.m$ حيث أن : p عدد أولي .

. الإثبات بالاستقراء حسب m ... من أجل : $m=1$ عندئذ : $n=p$ وفي هذه الحالة فإن الزمرة G تكون دوارة لأن مرتبتها عدداً أولياً p.

وبالتالي فإن العنصر المولد مرتبته p أي يوجد : $a \in G$ بحيث : $G=\langle a\rangle$ و : $o(a)=(G:1)=p$

• لنفرض أن المبرهنة صحيحة لأجل جميع الزمر الجزئية المحتواة تماماً في G نميز حالتين :

1) الحالة الأولى :

يوجد في G زمرة جزئية : $H \subsetneq G$ ودليلها لا يقبل القسمة على p ، لنفرض أن H زمرة جزئية في G حيث : $H \subsetneq G$ ودليلها لا يقبل القسمة على p وحسب لاغرانج :

$$p.m=n=(G:1)=(G:H)(H:1)$$

ومنه : $(H:1)$ تقبل القسمة على p « حسب مبرهنة إقليدس » لأن : $(G:H)$ لا تقبل القسمة على p

وحسب الفرض الاستقرائي فإن : H تحوي عنصر مرتبته p ، وبالتالي فإن : G تحوي عنصر مرتبته p.

الحالة الثانية: أدلة جميع الزمر الجزئية في G تقبل القسمة على P ولنفرض أنَّ: I هي مجموعة كل الزمر الجزئية في G والتي كل منها لا يساوي G، لنأخذ من I عنصر ذو المرتبة الأكبر ولتكن K ولنفرض أن هذه المرتبة هي S أي أنَّ: $(K:1) = S$

ونميز حالتين:

أ). P يقسم S: إذا كان S يقبل القسمة على P فإنه حسب الفرض الاستقرائي تكون K تحوي عنصر مرتبته P وبالتالي فإنَّ G تحوي عنصر مرتبته P.

ب) P لا يقسم S: لنفرض أنَّ S لا يقسم P، بما أنَّ $K \subseteq G$ عندئذٍ يوجد $x \in G$ بحيث $x \notin K$

ولنأخذ الزمرة الجزئية $T = \langle x \rangle$ ولنفرض أنَّ: $(T:1) = t$

بما أنَّ G زمرة تبديلية فإنَّ T ، K زمرتين ناظميتين في G

ومنه فإنَّ: $K.T$ زمرة جزئية في G وأنَّ:

$$K \subseteq K.T \subseteq G \Rightarrow K.T = G$$

ومنه حسب مبرهنة التماثل الثانية:

$$\frac{G}{K} = \frac{K.T}{K} \cong \frac{T}{T \cap K}$$

$$(G:K) = (T : T \cap K)$$

$$(G:1) = (G:K)(K:1)$$

$$(G:1) = (T : T \cap K).(K:1)$$

وبما أنَّ مرتبة G تقبل القسمة على P نجد أنَّ: $(T : T \cap K)$ يقبل القسمة على P (لأنَّ: $(K:1)$ لا يقبل القسمة على P)

$$(T:1) = (T : T \cap K)(T \cap K : 1)$$

وهذا يبين أنَّ: $(T:1) = t$ يقبل القسمة على P وحسب الفرض الاستقرائي فإنَّ: T تحوي عنصر مرتبته P هو: $x^{\frac{t}{P}} \in T$ كما أنَّ: $x^{\frac{t}{P}} \in G$

نتيجة عن هذه المبرهنة:

لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي p، عندئذ يوجد في G زمرة جزئية مرتبتها p.

(التوضيح: هذه الزمرة هي الزمرة الدوارة المولدة بالعنصر الذي تم إثبات وجوده في المبرهنة السابقة حيث نعلم أنّ الزمرة الدوارة بعنصر مرتبتها تساوي مرتبة العنصر المولدة به).

مبرهنة: لتكن G زمرة تبديلية منتهية و p عدداً أولياً ولنفرض أنّ: $(G:1) = m.p^n$ حيث: m، n أعداد صحيحة موجبة و p لا يقسم m عندئذ: $G = H \times K$ حيث:

$$K = \{x ; x \in G , x^m = e\}$$

$$H = \{x ; x \in G , x^{p^n} = e\}$$

الإثبات:

- لنبرهن أولاً أنّ: K، H زمر جزئية في G، واضح أنّ $H, K \neq \emptyset$ لأنّ: $e^m = e , e^{p^n} = e$ أي أنّ:

$$e \in H \quad , \quad e \in K$$

- لتكن: $x, y \in K$ عندئذ: $x^m = y^m = e$ ولنبرهن أنّ: $x.y^{-1} \in K$

$$(x.y^{-1})^m = x^m . y^{-m} = e.(y^m)^{-1} = e^{-1} = e$$

$$\Rightarrow x.y^{-1} \in K$$

{أي أن المجموعة K تشكل زمرة جزئية في G}.

- لتكن: $a, b \in H$ عندئذ: $a^{p^n} = b^{p^n} = e$ ولنبرهن أنّ: $a.b^{-1} \in K$.

$$(a.b^{-1})^{p^n} = a^{p^n} . b^{-p^n} = e(b^{p^n})^{-1} = e^{-1} = e \Rightarrow a.b^{-1} \in H$$

{أي أنّ المجموعة H تشكل زمرة جزئية في G}

- بما أن الزمرة G تبديلية فإن: H، K زمرة جزئية في G

لتكن: $z \in K \cap H$ ولنفرض أنّ: $o(z) = t$ عندئذ:

$$z \in K : z^m = e \quad , \quad z \in H : z^{p^n} = e$$

. وهذا يبين أنّ: t يقسم كلاً من m ، p^n ، وبأنّ: $gcd(m,p^n)=1$

فرضاً نجد أنّ: $t=1$ وبالتالي: $z=e$ أي $K \cap H = \langle e \rangle$

. وبأنّ: $gcd(m, p^n)=1$ يوجد $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ بحيث:

$$m \cdot \alpha + p^n \beta = 1$$

, أياً كان: $x \in G$ فإنّ:

$$x = x^{am+\beta p^n} = x^{am} \cdot x^{\beta p^n}$$

وبأنّ: $(x^{\beta p^n})^m \in K$

وأنّ: $(x^{am})^{p^n} \in H$

حسب تعريف الجوعتين: (H, K) نجد أنّ: $x \in H \cdot K = K \cdot H$

أي أنه أصبح لدينا: $G \subseteq K \cdot H \subseteq G$

ومما سبق يكون: $G = K \times H$

وظيفة: أثبت أنّ: $(H:1)=p^n$ ضمن شروط هذه المبرهنة.

ملاحظة: بالاعتماد على النص الأخير يمكننا صياغة المبرهنة التالية كل زمرة تبديلية يمكن نشرها بجوع مباشر لزمرة دوارة مرتبة كل منها قوة لعدد أولي وهذا النشر وحيد.

الـ P - زمر ومبرهنات سيلوف:

. تعريف (العنصرين المترافقين): لتكن G زمرة وليكن: $a, b \in G$

نقول إنّ: b و a مترافقان إذا وجد: $x \in G$ بحيث: $b = x \cdot a \cdot x^{-1}$

وينتج عن ذلك بأنّ كل عنصر مترافق مع نفسه لأنّ: $e \in G$

بحيث: $a = e \cdot a \cdot e^{-1}$.

نرمز لمجموعة العناصر المترافقة مع a بالشكل: $CL(a) = \{x \cdot a \cdot x^{-1}$
$, x \in G\}$

صف ترافق العنصر a

تمهيدية: لتكن G زمرة، لنعرف على G علاقة ρ بالشكل:

$$\forall a,b\in G : a\,\rho\, b \iff \exists x\in G : b = x.a.x^{-1}$$

عندئذ:

1) العلاقة ρ علاقة تكافؤ على G.

2) صفوف تكافؤ العلاقة ρ هي صفوف الترافق: $Cl(a)$ وذلك: $\forall a\in G$

3) المجموعة $\{Cl(a) ; a\in G\}$ تشكل تجزئة للزمرة G.

الإثبات:

«1 + 3» واضحة.

2) ليكن: $a\in G$ ولنثبت أنّ: $\{Cl(a) = \overline{a}\}$

ليكن: $b\in\overline{a}$ عندئذ: $a\,\rho\, b$ وحسب الفرض يكون:

$$\exists x\in G ; b = x.a.x^{-1} \Rightarrow b\in Cl(a)$$

أي: $\{\overline{a} \subseteq Cl(a)\}$

• ليكن: $c\in Cl(a)$ عندئذ:

$$\exists y\in G ; c = y.a.y^{-1} \Rightarrow a\,\rho\, c$$ «وذلك حسب الفرض»

$$\Rightarrow c\in\overline{a}$$

أي: $\{Cl(a) \subseteq \overline{a}\}$

ومنه: $\{Cl(a) = \overline{a}\}$

تمهيدية: لتكن G زمرة وليكن: $a\in G$ عندئذ:

1) المجموعة: $C(a)=\{x : x\in G, xa=ax\}$ تشكل زمرة جزئية في G.

2) لنفرض أنّ: $M_L(C(a))$ مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة $C(a)$ عندئذ: $card\, Cl(a) = card\, M_L(C(a))$

3) $card\, Cl(a) = (G:C(a))$

البرهان:

1) بما أنّ: $e.a = a.e$ يكون: $e\in C(a)$ ومنه: $C(a)\neq\emptyset$

بفرض: $x,y\in C(a)$ فإنّ:

$$xa=ax \wedge ya=ay$$

$$(x\cdot y^{-1})\cdot a = x(y^{-1}\cdot a) = x(a\cdot y^{-1}) = a(x\cdot y^{-1})$$
$$\Rightarrow x\cdot y^{-1}\in C(a)$$
ومنه: $C(a)$ زمرة جزئية في G.

---

2) لنعرف العلاقة: $f: CL(a)\longrightarrow M_L(C(a))$
بالشكل: $x\cdot a\cdot x^{-1}\in CL(a)\,;\ f(x\cdot a x^{-1}) = x\cdot C(a)$
ليكن: $x a\cdot x^{-1}, y a\cdot y^{-1}\in Cl(a)$ فنجد أنّ f تطبيق متباين:
لأنّ:
$$x\cdot a\cdot x^{-1} = y\cdot a\cdot y^{-1} \Leftrightarrow \underbrace{y^{-1}\cdot x\cdot a\cdot x^{-1}\cdot y}_{=a} = y^{-1}\cdot x\cdot a(y^{-1}\cdot x)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow (y^{-1}\cdot x)\,a = a\,(y^{-1}\cdot x)$$
$$\Leftrightarrow y^{-1}\cdot x\in C(a) \Leftrightarrow y^{-1}\cdot a\cdot C(a) = C(a)$$
$$\Leftrightarrow x\cdot C(a) = y\cdot C(a)$$
$$\Leftrightarrow f(x\cdot a\cdot x^{-1}) = f(y\cdot a\cdot y^{-1})$$

f غامر لأنّ: بفرض: $Z\cdot C(a)\in M_L(C(a)); Z\in G$
$$Z\,a\cdot Z^{-1}\in CL(a)\ ,\ f(Z a Z^{-1}) = Z\cdot C(a)$$

ومما سبق يكون f تقابل ومنه:
$$\text{card } CL(a) = \text{card } M_L(C(a))$$

---

3) واضح لأنّ دليل $C(a)$ في G هو عدد المرافقات اليسارية (اليمينية) لـ: $C(a)$ في G.

مبرهنة: لأجل أي زمرة منتهية G فإنّ العلاقة الآتية صحيحة وهي:
$$(G:1) = \text{card } CL(a) = \sum (G:C(a))$$
والتي تسمى علاقة الصفوف، حيث أنّ المجموع في هذه

المبارزة بأخذ على العناصر الممثلة لصفوف الترافق .

تمهيدية: لتكن G زمرة و $a \in G$ الشروط الآتية متكافئة:

1) . $a \in Z(G)$

2) . $Cl(a) = \{a\}$

3) . $card\, Cl(a) = 1$

الإثبات:

$1 \Leftarrow 2$. لنفرض أن: $a \in Z(G)$ عندئذٍ: $x.a = a.x$

ومنه: $a = x.a.x^{-1}$

أي أن: $\{\{a\} \subseteq Cl(a)\}$

$\forall y \in Cl(a) : y = x.a.x^{-1} = x.x^{-1}.a = a$

$; x \in G$

ومنه: $\{Cl(a) \subseteq \{a\}\}$

أي: $Cl(a) = \{a\}$

$(2 \Rightarrow 1)$: لنفرض أن: $Cl(a) = \{a\}$ عندئذٍ:

$\forall x \in G : x.a.x^{-1} = a \Rightarrow x.a = a.x$

$\Rightarrow a \in Z(G)$

$(2 \Leftrightarrow 3)$ واضح.

انتهت المحاضرة