الأحد: 21/12/2014

المحاضرة الحادية و العشرون:

تعريف الشطر البسيط لسطح:

$$F \text{ شطر بسيط لسطح } \Longleftrightarrow \exists \vec{r} : \Delta = [a,b] \times [a,b] \xrightarrow[\text{متباينة}]{\text{مستمرة}} \mathbb{R}^3$$

$$(u^1, u^2) \longmapsto \vec{r}(u^1, u^2)$$

بحيث تحقق:

$$\vec{r}(\Delta) = \vec{OF}$$

نسمي $\vec{r}$ تمثيلا وسيطيا للشطر البسيط لسطح F

إذا كان:

$$\vec{r}(u^1, u^2) = \left(x(u^1, u^2),\ y(u^1, u^2),\ z(u^1, u^2) \right)$$

نسمي المعادلات:

$$x = x(u^1, u^2), \quad y = y(u^1, u^2), \quad z = z(u^1, u^2)$$

بالمعادلات الوسيطية لـ F.

ونسمي u^1, u^2 وسيطا التمثيل $\vec{r}$.

ملاحظة:

يمكن القول أننا نستطيع الحصول على شطر بسيط لسطح بمط أو بضغط أو بطي مستطيل مغلق دون تمزيق (دون أن نخل بصفة الاستمرار) ودون لصق (دون أن نخل بشرط التباين)، ولذلك فإن الاسطوانة يستحيل أن تكون شطرا بسيطا لسطح لأنه لا يمكننا الحصول عليها بالعمليات المذكورة سابقا من مستطيل دون عملية لصق.

أيضا الكرة لا يمكن أن تكون شطرا بسيطا لسطح لأنه لا يمكن الحصول عليها انطلاقا من مستطيل دون عملية لصق.

- إذا أخذنا من اسطوانة محدودة شريطاً مفتوحاً من الطرفين ومغلقاً من الأعلى والأسفل فإننا سنحصل على شطر بسيط لسطح.

ملاحظة:

نستطيع أن نستخدم في تعريف الشطر البسيط لسطح - بدلاً من المستطيل - أي مجموعة مغلقة وبسيطة الترابط وبشكل خاص القرص المغلق.
وذلك لأنه يوجد تقابل بين أي مستطيل مغلق وأي قرص مغلق.

- إذا اقتطعنا من سطح كرة قبة كروية مفتوحة فإننا سنحصل على شطر بسيط لسطح أي الجزء المتبقي منها سيكون شطراً بسيطاً لسطح

تذكرة:

التبولوجيا النسبية: τ_Y

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $\phi \neq Y \subseteq X$ نسمي:

$$\tau_Y = \{A \cap Y \; ; \; A \in \tau\}$$

تبولوجيا على Y نسميها التبولوجيا النسبية

المجموعة بسيطة الترابط:

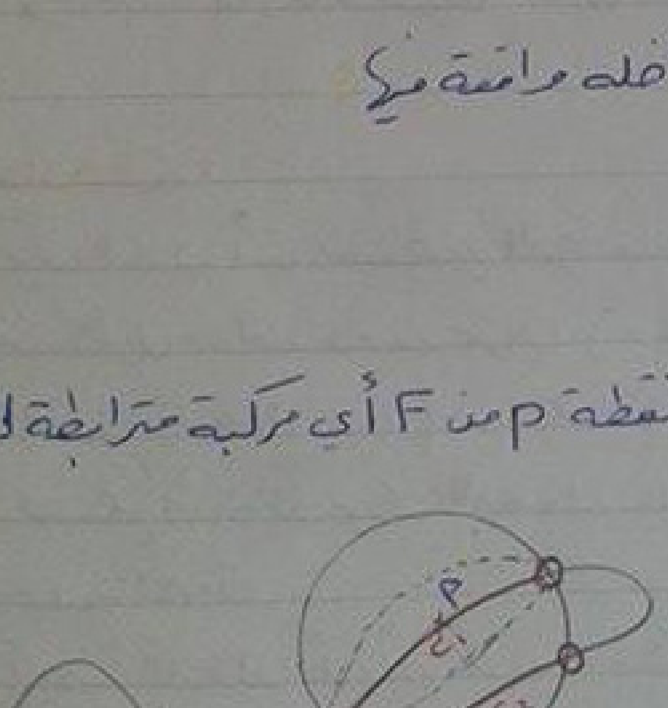
أي منحني مغلق منها جميع النقاط التي تقع بداخله واقعة فيها

التبولوجيا الأصلية:

جوار التبولوجيا الأصلية:

لتكن F مجموعة مترابطة في $\mathbb{R}^3$ ، ندعو جواراً للنقطة p من F أي مركبة مترابطة لـ p في تقاطع F مع جوار لـ p في $\mathbb{R}^3$

مثال



$C_1 \cup C_2$ جوار لـ p (في التبولوجيا النسبية لـ F)

/ /

لأن $C_1 \cup C_2 = C_p \cap F$

لكن $C_1 \cup C_2$ ليس جواري التبولوجيا الأصيلة

وأما:

C_1 مترابطة و $p \in C_1 \Leftarrow$ C_1 هي جوار لـ p في التبولوجيا الأصيلة.

- على السطوح الكروية والسطوح الاسطوانية تتطابق التبولوجيا الأصيلة مع التبولوجيا النسبية.

السطح العادي:

تعريف:

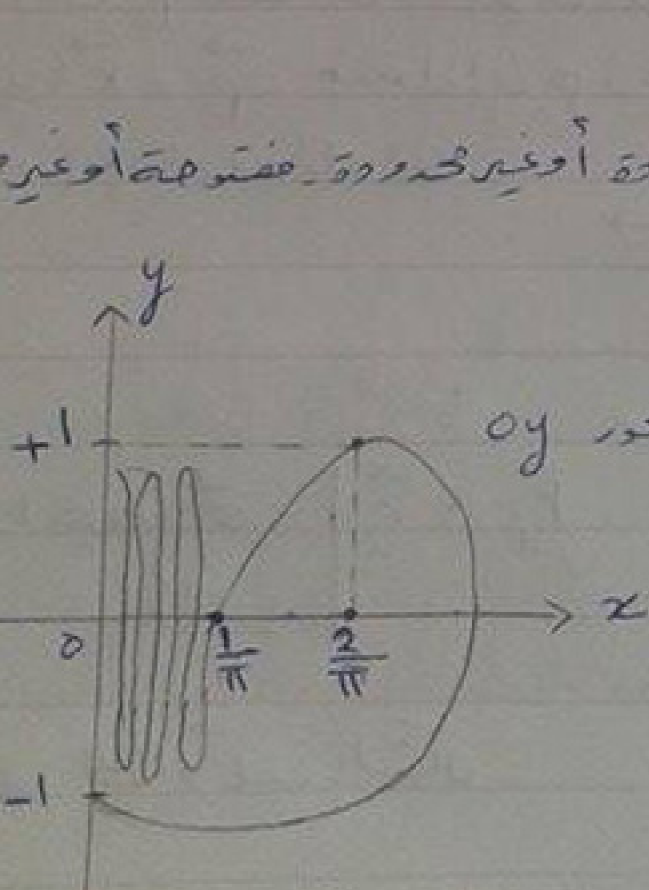
نقول عن مجموعة مترابطة F من نقاط الفضاء الثلاثي إنها سطح عادي إذا وُجد لكل نقطة p من F جوار U في F (حيث F مزودة بالتبولوجيا الأصيلة) بحيث تكون لصاقته شغراً بسيطاً لسطح.

أمثلة على السطح العادي:

[1] كل شغر بسيط لسطح هو سطح عادي ومنه القرص المغلق هو سطح عادي لأنه شغر بسيط لسطح.

[2] الكرة (السطح الكروي) هي سطح عادي.

[3] الاسطوانة هي سطح عادي (سواء محدودة أو غير محدودة، مفتوحة أو غير مفتوحة).



مثال: (للاطلاع)

لنأخذ المنحني المكون من القطعة المستقيمة على المحور Oy $[-1,+1]$ ومن بيان الدالة

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$ ،

$0 < x < \frac{2}{\pi}$

ومن القوس الواصل بين النقطتين $(0,-1)$, $(\frac{2}{\pi},-1)$

نأخذ $y=0$ ⇐ $\sin\frac{1}{x}=0$ ⇐ $\frac{1}{x}=\pi k$

نقاط تقاطع مع المحور ox

$$\Rightarrow x=\frac{1}{\pi}k \;;\; k\in Z^{+*}$$

إن هذا المنحني سيبقى صاعد وهابط ولن يتوقف ولن يصل.

إذا أخذنا مستقيم عمودي على المستوي xy ثم جعلنا هذا المستقيم يتحرك على نقاط المنحني بحيث يبقى عمودياً على المستوي ولا نهائي فسيرسم سطح غير منتهي.

ويمكن إثبات أن هذا السطح هو سطح عادي ويميز التبولوجيا الأصيلة عن التبولوجيا النسبية.

سطح عادي من الصنف C_n :

تعريف:

نقول عن سطح عادي F إنه من الصنف C_n إذا وجد لأجل كل نقطة p منه جوار V في F وتمثيلاً لإحداثية هذا الجوار من الصنف C_n :

$$\vec{r} : (u^1,u^2) \longmapsto \vec{r}(u^1,u^2)$$

* إذا كانت p_0 نقطة من سطح عادي موافقة للثنائية (u_0^1,u_0^2) أي $\vec{op_0}=\vec{r}(u_0^1,u_0^2)$ فنقول إن p_0 نظامية في التمثيل $\vec{r}$ ($\vec{r}$ من الصنف C_n حيث $n\geq 1$) إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^1}\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^2}\Big|_{(u_0^1,u_0^2)}\neq\vec{0}$$

رمز مختصر للمشتق الجزئي

أما إذا كان $\vec{r}_{u^1}\wedge\vec{r}_{u^2}\Big|_{(u_0^1,u_0^2)}=\vec{0}$ فنقول إن p_0 شاذة في التمثيل $\vec{r}$ المعطى.

هذا الجداء يكتب بالشكل

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \end{vmatrix}_{(u_0^1, u_0^2)} = \vec{0}$$

حل وظيفة من المحاضرة السادسة عشر

أوجد النقاط الشاذة للمنحني، ثمّ عيّن نوع هذه النقاط؟

المنحني ممثّل بـ:

$$\vec{r} \begin{cases} x = a\left(\cos t + \ln\left(tg\frac{t}{2}\right)\right) \\ y = a\sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad 0 < t < \pi$$

لإيجاد النقاط الشاذة نأخذ

$$\vec{r}'(t) \begin{cases} x' = a\left(-\sin t + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}}{tg\frac{t}{2}}\right) = a\left(-\sin t + \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right) \\ \quad = a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) \\ y' = a\cos t \\ z' = 0 \end{cases}$$

ملاحظة:

بما أن المنحني من الصنف C^∞ فلا يوجد نقاط شاذة سببها عدم وجود المشتق

وإنما انعدامه لذلك سندرس $\vec{r}'(t) = \vec{0}$

قد يطلب في الامتحان إيجاد نقاط شاذة يكون سببها عدم وجود المشتق لذلك نتأكد أولاً المنحني من أي صنف هو.

$$\vec{r}'(t)=\vec{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} x'(t)=0 \Rightarrow -\sin t+\dfrac{1}{\sin t}=0 & ① \\ y'(t)=0 \Rightarrow \cos t=0 & ② \end{cases}$$

نريد الحل المشترك لجملة المعادلتين، لذلك نبدأ بالأسهل ②

$$\cos t=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}+\pi k \ ; \ k\in \mathbb{Z}$$

لكن القيمة الوحيدة لـ t الموجودة في المجال $]0,\pi[$ هي $t=\frac{\pi}{2}$ الموافقة لـ $k=0$

نعوض في ①

$$-\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}=-1+1=0$$

$\frac{\pi}{2}$ تحقق المعادلة ①.

$\Leftarrow$ $t=\frac{\pi}{2}$ حلاً مشتركاً لـ ① و ②

$\Leftarrow$ ومنه القيمة الوحيدة التي تعدم $\vec{r}'(t)$ هي $t=\frac{\pi}{2}$

فهي النقطة الشاذة الوحيدة أو النقطة

$P_0=\vec{r}(\frac{\pi}{2})=(0,a,0)$ هي النقطة الشاذة

الوحيدة للمنحني في التمثيل $\vec{r}$

لمعرفة نوع النقطة فيما إذا كانت شاذة أساسية أو غير أساسية نستخدم الاختبار:
رتبة أول مشتق غير معدوم عند هذه النقطة زوجية أم فردية.

$$\Rightarrow \vec{r}''(t)=\left(a\left(-\cos t-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right), -a\sin t, 0\right)$$

$$\vec{r}''(\frac{\pi}{2})=(0,-a,0)\neq\vec{0}$$

⟸ مرتبة أول مشتق غير معدوم هي 2 وهي زوجية

⟸ P_0 نقطة شاذة أساسية للمنحني وهي وحيدة (حيث باقي النقاط في المنحني نظامية)

تمرين 12 في الكتاب:

أثبت أن التمثيل التالي:

$$\begin{cases} x = a \ln t + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2a}{1+t^2} \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

تمثيل آخر للمنحني؟

فكرة الحل:

يجب أن نثبت أنه مكافئ للتمثيل المعروف.

نأخذ:

$$\tau = tg \frac{t}{2} \Rightarrow t = 2 \operatorname{arc} tg\, \tau$$

$$t = \phi(\tau) = 2 \operatorname{Arc} tg\, \tau$$

$$\phi :]0, \infty[\longrightarrow]0, \pi[$$

يجب أن نثبت أن هذه الدالة مستمرة وغامرة ومتزايدة تماماً.

تمرين 25 في الكتاب:

أوجد تقوس الدويري؟

الدويري يمثل بـ:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

المقرر يطلب:

$$k = \frac{\| \vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,'' \|}{\| \vec{r}\,' \|^3}$$

$$\vec{r}\,' = \begin{cases} x' = a(1 - \cos t) \\ y' = a \sin t \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$\vec{r}\,'' = \begin{cases} x'' = a \sin t \\ y'' = a \cos t \\ z'' = 0 \end{cases}$$

$$\| \vec{r}\,' \| = \sqrt{a^2 (1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}$$

$$= a \sqrt{1 - 2\cos t + \cos t^2 + \sin^2 t} = a \sqrt{2 - 2\cos t}$$

$$= a \sqrt{2 \left(2 \sin^2 \frac{t}{2} \right)} = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right|$$

$$\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a(1 - \cos t) & a \sin t & 0 \\ a \sin t & a \cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0, 0, a^2(\cos t - \cos^2 t) - a^2 \sin^2 t)$$

$$= (0, 0, a^2(\cos t - 1))$$

$\Rightarrow \|\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''\| = a^2 (1 - \cos t)$

نعوض في دستور التقوس:

$\Rightarrow k = \dfrac{a^2(1-\cos t)}{8a^3 \sin^2\frac{t}{2} \, |\sin\frac{t}{2}|}$

$= \dfrac{2\sin^2\frac{t}{2}}{8a\sin^2\frac{t}{2}\,|\sin\frac{t}{2}|}$

$= \dfrac{1}{4a|\sin\frac{t}{2}|} \quad ; \quad t \neq 2\pi k$

$(t \neq 2\pi k)$

والعلاقة السابقة تعطينا التقوس عند نقطة t.

جميع التمارين المتعلقة بالمقاربات في الكتاب محذوفة.