$R^n = M \oplus S \Rightarrow \exists P : P^2 = P$ $\quad$ $A^T$ transformatrix

rang null

null rang



## 1.12 Projection Operators

Projection operators or *projectors* play an important role in numerical linear algebra, particularly in iterative methods for solving various matrix problems. This section introduces these operators from a purely algebraic point of view and gives a few of their important properties.

### 1.12.1 Range and Null Space of a Projector

A projector $P$ is any linear mapping from $\mathbb{C}^n$ to itself that is idempotent, i.e., such that

$$P^2 = P.$$

A few simple properties follow from this definition. First, if $P$ is a projector, then so is $(I - P)$, and the following relation holds:

$$\text{Ker}(P) = \text{Ran}(I - P). \tag{1.57}$$

In addition, the two subspaces $\text{Ker}(P)$ and $\text{Ran}(P)$ intersect only at the element zero. Indeed, if a vector $x$ belongs to $\text{Ran}(P)$, then $Px = x$ by the idempotence property. If it is also in $\text{Ker}(P)$, then $Px = 0$. Hence, $x = Px = 0$, which proves the result. Moreover, every element of $\mathbb{C}^n$ can be written as $x = Px + (I - P)x$. Therefore, the space $\mathbb{C}^n$ can be decomposed as the direct sum

$$\mathbb{C}^n = \text{Ker}(P) \oplus \text{Ran}(P).$$

Conversely, every pair of subspaces $M$ and $S$ that forms a direct sum of $\mathbb{C}^n$ defines a unique projector such that $\text{Ran}(P) = M$ and $\text{Ker}(P) = S$. This associated projector $P$ maps an element $x$ of $\mathbb{C}^n$ into the component $x_1$, where $x_1$ is the $M$ component in the unique decomposition $x = x_1 + x_2$ associated with the direct sum.

In fact, this association is unique; that is, an arbitrary projector $P$ can be entirely determined by two subspaces: (1) the range $M$ of $P$ and (2) its null space $S$, which is also the range of $I - P$. For any $x$, the vector $Px$ satisfies the conditions

$$Px \in M,$$
$$x - Px \in S.$$

The linear mapping $P$ is said to project $x$ *onto* $M$ and *along* or *parallel to* the subspace $S$. If $P$ is of rank $m$, then the range of $I - P$ is of dimension $n - m$. Therefore, it is natural to define $S$ through its orthogonal complement $L = S^{\perp}$, which has dimension $m$. The above conditions, which define $u = Px$ for any $x$, become

$$u \in M, \tag{1.58}$$
$$x - u \perp L. \tag{1.59}$$

These equations define a projector $P$ *onto* $M$ and *orthogonal* to the subspace $L$. The first statement, (1.58), establishes the $m$ degrees of freedom, while the second, (1.59), gives the $m$ constraints that define $Px$ from these degrees of freedom. The general definition of projectors is illustrated in Figure 1.1.

ker P = rang(I - P) $\Leftrightarrow$ linear function & $P^2 = P$

$\mathbb{C}^n$ = Ker(P) $\oplus$ rang(P)

"المحاضرة الرابعة عشر"

"الصفحة 32"

## 1.12 تطبيقات الإسقاط:

إن تطبيقات الإسقاطات لها دور هام في الجبر الخطي العددي وبشكل خاص في الطرائق التكرارية لحل مشاكل عديدة في المصفوفات. جزء من هذا القسم يهتم بهذه المشكلات من وجهة نظر جبرية بحتة وإعطاء الشكل من جهة المرجعة.

### 1.12.1 (مدى والفضاء الصفري) الإسقاط : هام

إن الإسقاط $P$ هو أي تطبيق خطي من الفضاء $\mathbb{C}^n$ لـ نفسه والذي يحقق خاصية اللاتغير والتي هي $P^2 = P$

القليل من الخواص البسيطة التالية تأتي مباشرة من التعريف.

أولاً: إذا كان $P$ إسقاط عندئذ يكون $(I-P)$ أيضاً كذلك وتتحقق العلاقة

$$Ker(P) = Ran(I-P)$$

بالإضافة لذلك فإن الفضائين الجزئيين $Ker(P)$ و $Ran(P)$ يتقاطعان فقط بالصفر.

في الحقيقة إذا كان الشعاع $x$ ينتمي إلى مدى $P$ فإن $Px = x$ وذلك حسب خاصية اللاتغير.

أيضاً إذا كان ينتمي إلى نواة $P$ فإن صورته $0$ وعندها

$$x = Px = 0$$

والذي يوضح صحة النتيجة.

وأكثر من ذلك فإن كل عنصر من الفضاء $\mathbb{C}^n$ يمكن كتابته بالشكل

$$x = Px + (I-P)x$$

لذا فإن الفضاء $\mathbb{C}^n$ يمكن تحليله إلى المجموع المباشر:

$$\mathbb{C}^n = Ker(P) \oplus Ran(P)$$

وبالعكس كل ثنائية من الفضاءات الجزئية $S$ و $M$ والتي تشكل مجموع مباشر للفضاء $\mathbb{C}^n$ أي $M \oplus S = \mathbb{C}^n$

يعرف إسقاطاً وحيداً بحيث أن أحد الفضائين $M$ و $S$ يكون نواته!

الإسقاط والأخر لا يوجد له.

إن هذا الإسقاط $P$ يربط كل عنصر $x \in \mathbb{R}^n$ مع العنصر $Px$ حيث $x_1$

هو المكون لـ $x$ في الحقل الواسع المرتبط بهذا المصفوفة المناسبة.

في الحقيقة إن هذا الإسقاط يوجد حيث أي إسقاط $P$ يمكن أن يحدد

بشكل كامل من خلال فضاءين جزئيين.

① $M$ مدى $P$

② $S$ فضاء العدم (نواة)

والذي هو أيضاً مدى لـ $(I-P)$

لكل $x$ فإن الشعاع $P_x$ (صورة $x$ وفق $P$) يحقق الشروط

$$P_x \in M$$

$$x - Px \in S$$

إن الصفة المميزة $P$ هو أنه إسقاط لـ $x$ على $M$ باتجاه الفضاء الجزئي $S$

إذا كانت مرتبة $P$ هي $m$ فإن عدد أبعاد الفضاء $I-P$ هو $n-m$

لذا من الممكن أن نعرف الفضاء $S$ من خلال متممه العمودي كي $= L$

والذي هو البعد $m$.

" المحاضرة الرابعة عشر "