المحاضرة التاسعة عشر:

تعريف: (1) : P - زمرة:

لتكن G زمرة منتهية و P عدد أولي نقول عن G إنها: P-زمرة إذا كان: $(G:1)=p^n$ حيث: $n\in\mathbb{N}$

مثال:

$(G:1)=25=5^2$ هي: 5 - زمرة،

$(G:1)=3=3^1$ هي: 3 - زمرة.

مبرهنة: لتكن G زمرة منتهية، إذا كانت G هي P- زمرة عندئذ:

$$Z(G)\neq\langle e\rangle$$

الإثبات:

- لنفرض أنّ: $(G:1)=p^n$ حيث أنّ P عدداً أولياً، لدينا حسب علاقة الصفوف:

$$(G:1)=\sum(G:c(a))$$

- يمكننا تقسيم المجموع على العناصر بالشكل:

$$(G:1)=\sum_{a\in Z(G)}(G:c(a))+\sum_{a\notin Z(G)}(G:c(a))$$

$$p^n=\operatorname{card}Z(G)+\sum_{a\notin Z(G)}(G:c(a))$$

- بما أنّ: $c(a)$ زمرة جزئية في G فإنّ مرتبتها تقسم رتبة G ومنه:

$$(G:c(a))=\frac{(G:1)}{(c(a):1)}$$

$$(c(a):1)=p^r\quad:\quad 1\leq r\leq n$$

$$(G:c(a))=\frac{p^n}{p^r}=p^{n-r}$$

. وهذا يبين أن المقدار : $(G:C(a))$ يقبل القسمة على P ومنه فإن المجموع $\sum_{a\notin Z(G)}(G:C(a))$ يقبل القسمة على P

$$\Rightarrow (Z(G):1) = P^n - \underbrace{\sum_{a\notin Z(G)}(G:C(a))}_{\text{يقبل القسمة على } P}$$

وبالتالي فإن : $(Z(G):C(a))$ تقبل القسمة على P وبالتالي تكون : $Z(G)$ هي زمرة تبديلية منتهية ومرتبتها تقبل القسمة على P ومنه فإن : $Z(G)$ تحوي عنصر مرتبته P وبالتالي : $Z(G)\neq\langle e\rangle$

مبرهنة : لتكن : G زمرة منتهية ولتكن : P عدد أولي ، إذا كانت : $(G:1)=P^2$ تكون G تبديلية

الإثبات : إذا كانت : $G=Z(G)$ تكون تبديلية

بما أن : G هي : P ـ زمرة فإن : $Z(G)\neq\langle e\rangle$ وذلك حسب المبرهنة السابقة

ومنه نجد : إما : $(Z(G):1)=P$ وإما : $(Z(G):1)=P^2$

ـ إذا كانت : $(Z(G):1)=P^2$ عندئذ : $G=Z(G)$ ومنه : G تبديلية .

ـ إذا كانت : $(Z(G):1)=P$ عندئذ :

$$\frac{(G:1)}{(Z(G):1)} = (G:Z(G)) = P$$

وبما أن $Z(G)$ ناظمية في G فإن زمرة الخارج : $G/Z(G)$ موجودة ومرتبتها تساوي P

ومنه تكون زمرة الخارج دوارة وحسب مبرهنة سابقة تكون G تبديلية .

تمهيدية : لتكن : G زمرة هي : P ـ زمرة عندئذ :

1) . كل زمرة جزئية في G هي : P ـ زمرة

2) . إذا كانت : K زمرة جزئية في G عندئذ زمرة الخارج G/K تكون P ـ زمرة .

البرهان :

1) لنفرض أنّ : $(G:1)=p^n$ حيث : p عدد أولي ولتكن : H زمرة جزئية في G ومنه حسب لاغرانج يكون :

$$(G:1)=(G:H)\cdot(H:1) \Rightarrow p^n=(G:H)\cdot(H:1)$$

وهذا يبين أنّ : $p^r=(H:1)$ حيث : $r\leq n$ وبالتالي يكون :

H هي : pـ زمرة .

2) لتكن : K زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G عندئذ :

$$(G/K:1)=(G:K)=\frac{(G:1)}{(K:1)}=\frac{p^n}{p^m}$$
$$=p^{n-m}\ ;\ m\leq n$$

ومنه نجد أنّ : G/K هي : pـ زمرة .

تمهيدية : لتكن : G زمرة منتهية و: H زمرة جزئية ناظمية في G و p عدد أولي ، الشروط الآتية متكافئة :

1) الزمرة G هي : pـ زمرة .

2) كلّ من H ، G/H تكون : pـ زمرة .

الإثبات :

(1 ⇐ 2)) : حسب التمهيدية الأخيرة .

(2 ⇐ 1)) :

لنفرض أنّ : $(G/H:1)=p^t$ ، $(H:1)=p^s$ وحسب لاغرانج يكون :

$$(G:1)=(G:H)\cdot(H:1)=p^t\cdot p^s$$
$$(G:1)=p^{t+s}=p^n\ ;\ n\in\mathbb{N}$$

ومنه تكون : G هي : pـ زمرة .

مبرهنات سيلوف:

• مبرهنة سيلوف الأولى:

لتكن: G زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على p^K حيث: p عدد أولي، K عدد صحيح موجب عندئذ: الزمرة G تحوي زمرة مرتبتها p^K.

الإثبات:

لنفرض أنّ: $(G:1) = n.p^K$، البرهان يتم بالاستقراء وحسب مرتبة G.

عندما تكون مرتبة الزمرة G تساوي الواحد فالمبرهنة تكون صحيحة.

لنفرض أنّ المبرهنة صحيحة من أجل جميع الزمر التي مرتبتها أصغر من مرتبة G ولنميز حالتين:

1) يوجد في G زمرة جزئية واحدة على الأقل $H \subseteq G$ مرتبتها تقبل القسمة على p^K وحسب الفرض الاستقرائي فإنّ: H تحوي زمرة جزئية مرتبتها p^K وبالتالي: G تحوي زمرة جزئية مرتبتها p^K.

2) جميع الزمر الجزئية في G مرتبتها لا تقبل القسمة على p^K، لدينا من علاقة الصفوف:

$$(G:1) = (Z(G):1) + \sum_{a \notin Z(G)} (G:C(a))$$

وحسب مبرهنة لاغرانج يكون:

$$(G:1) = (G:C(a))(C(a):1)$$

$$n.p^K = (G:C(a)).(C(a):1)$$

وبما أنّ (الزمر الجزئية مرتبتها لا تقبل القسمة على p^K) يكون المقدار: $(C(a):1)$ لا يقبل القسمة على p^K.

وبالتالي يكون المقدار $(G:C(a))$ يقبل القسمة على p.

$$(Z(G):1) = (G:1) - \sum_{a \notin Z(G)} (G:C(a))$$

نلاحظ أنّ الطرف الأيمن في المساواة يقبل القسمة على p وبالتالي $(Z(G):1)$ تقبل القسمة على p.

أصبح لدينا الزمرة: $Z(G)$ زمرة تبديلية منتهية تقبل القسمة على p وبالتالي:

- يوجد في $Z(G)$ عنصر مرتبته p ((وذلك حسب مبرهنة سابقة))
وليكن هذا العنصر هو: $x \in Z(G)$ ولنأخذ $\langle x\rangle$ بحيث:

$$(\langle x\rangle : 1) = p$$

- فيكون:

$$\langle x\rangle \subseteq Z(G) \subseteq G$$

- بما أن: $\langle x\rangle$ ناظمية في $Z(G)$ و $Z(G)$ ناظمية في G يكون $\langle x\rangle$ ناظمية في G لأن: $Z(G)$ زمرة تبديلية وكل زمرة تبديلية من زمرة تبديلية تكون ناظمية فيها وبالتالي:
زمرة الخارج: $G/\langle x\rangle$ موجودة وتحقق:

$$(G/\langle x\rangle : 1) = (G : \langle x\rangle) = \frac{(G:1)}{(\langle x\rangle : 1)} = \frac{n p^K}{p}$$

$$\Rightarrow (G/\langle x\rangle : 1) = n.p^{K-1}$$

- أصبح لدينا: $G/\langle x\rangle$ زمرة رتبتها: $n.p^{K-1}$ وحسب الفرض الاستقرائي تكون: $G/\langle x\rangle$ زمرة تحوي زمرة جزئية مرتبتها: p^{K-1} وهذه الزمرة الجزئية من الشكل: $K/\langle x\rangle$
حيث: K زمرة جزئية من: G و: $\langle x\rangle \subseteq K$

$$p^{K-1} = (K/\langle x\rangle : 1) = (K : \langle x\rangle)$$

$$(K:1) = (K:\langle x\rangle).(\langle x\rangle:1) = p^{K-1}.p = p^K$$

- أصبح لدينا: K زمرة جزئية في: G بحيث: $(K:1) = p^K$
وهذه الحالة مرفوضة لأننا تناقض ما ناقشه حيث كل الزمر الجزئية في G مرتبتها لا تقبل القسمة على p^K.

توظيف استخدام مبرهنة سيلوف الأولى:

- ليكن: G زمرة وليكن: $(G:1) = 2^5.3.7^2.5^3.11$
يوجد في G زمر مراتبها: $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 3, 7, 7^2, 5, 5^2, 5^3, 11$
- لكن لا يمكننا الحكم فيما إذا كان يوجد زمرة جزئية مرتبتها مثلاً: 2.3 أو: $7^2.11$ ...

أما إذا كانت الزمرة G تبديلية ستكون الزمر التي مراتبها 3 , 2 ناظمية (جزئية من تبديلية) في هذه الحالة يوجد زمرة جزئية مرتبتها :

2.3 , $2^2.7$ ... الخ

انتهت المحاضرة .