المحاضرة السابعة عشر:

مثال: الزمرة $\mathbb{Z}_{30}$

$$\mathbb{Z}_{30} \cong \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{15}$$
$$\cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{10}$$

المجموع المباشر للزمر:

تعريف: لتكن G زمرة و: K , H زمر جزئية في G نقول إنّ G مجموع مباشر للزمرتين K ، H إذا تحقق:

1) K ، H زمرتين جزئيتين ناظميتين في G.

2) $G = H \cdot K$

3) $H \cap K = \langle e \rangle$

ونرمز لذلك بالرمز: $G = H \times K$

تمهيدية: لتكن G زمرة و: K و H زمر جزئية ناظمية في G، إذا كان $H \cap K = \langle e \rangle$ عندئذٍ: أياً كان: $r \in K$ ، $h \in H$ فإنّ: $h \cdot r = r \cdot h$

الإثبات:

. ليكن: $h \in H$ ، $r \in K$ عندئذٍ:

$$h \cdot r \cdot h^{-1} \cdot r^{-1} = (h \cdot r \cdot h^{-1})\, r^{-1} \in K$$ «لأنّ: K ناظمية»

$$h \cdot r \cdot h^{-1} \cdot r^{-1} = h\,(r \cdot h^{-1} \cdot r^{-1}) \in H$$ «لأنّ: H ناظمية»

$$h \cdot r \cdot h^{-1} \cdot r^{-1} \in H \cap K = \langle e \rangle \Rightarrow h \cdot r \cdot h^{-1} \cdot r^{-1} = e$$
$$\Rightarrow h \cdot r = r \cdot h$$

ملاحظة:

. $H \cdot K = K \cdot H$ هذا لا يعني أن الزمرة تبديلية، العناصر التي تتبادل هي فقط h_0 ، K_0.

مبرهنة: لتكن G زمرة ولتكن: K , H زمر جزئية ناظمية في G عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة:

1) - $G = H \times K$

2) - أياً كان: $g \in G$ فإنّ: g تكتب بصورة وحيدة على النحو:

$g = h_0 . k_0$ بحيث: $k_0 \in K$ ، $h_0 \in H$

الإثبات:

(1 ⇐ 2):

• لنفرض أنّ $G = H \times K$ ولتكن $g \in G = H . K$ وبالتالي:

يوجد $k_1 \in K$ ، $h_1 \in H$ بحيث: $g = h_1 . k_1$

• لنفرض أنه يوجد $k_2 \in K$ ، $h_2 \in H$ بحيث: $g = h_2 . k_2$

$$\Rightarrow h_1 . k_1 = h_2 . k_2 \Rightarrow h_1 = h_2 . k_2 . k_1^{-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{h_2^{-1} . h_1}_{\in H} = \underbrace{k_2 . k_1^{-1}}_{\in K} \in H \cap K = \langle e \rangle$$

ومنه يكون: $h_2^{-1} . h_1 = e$ وبالتالي: $h_1 = h_2$

$k_2 . k_1^{-1} = e$ وبالتالي: $k_1 = k_2$

ومنه: g يكتب بشكل وحيد.

(2 ⇐ 1): K , H زمر جزئية ناظمية في G ومنه

$\{H . K \subseteq G\}$ زمرة جزئية في G.

لتكن $g \in G$ وحسب الفرض: $g = h_0 . k_0$ حيث: $h_0 \in H , k_0 \in K$

$$g = h_0 . k_0 \in H . K \Rightarrow \{G \subseteq H . K\}$$

وبالتالي:

$$G = H . K$$

• لنفرض جدلاً أنّ $H \cap K \neq \langle e \rangle$ عندئذٍ يوجد $x \in H \cap K$ و:

$x \neq e$

• بما أنّ: $x \in H$ فإنه يوجد $h_0 \in H$ بحيث: $x = h_0$

و $x \in K$ فإنه يوجد $k_0 \in K$ بحيث: $x = k_0$

$h_0 = k_0 \Rightarrow h_0 \cdot k_0^{-1} = e \in H \cdot K = G$

وبما أنّ الكتابة بشكل وحيد: $e = e \cdot e$ نجد أنّ:

$x = e$ ومنه: $h_0 = e$ ، $k_0 = e$

وبالتالي: $H \cap K = \langle e \rangle$

ومما سبق يكون: $G = H \times K$

مبرهنة: لتكن G زمرة ولتكن H، K زمر جزئية ناظمية في G

عندئذٍ: $H \times K \cong H \oplus K$

الإثبات:

. لنعرف الملاقة: $f : H \times K \longrightarrow H \oplus K$

$\forall h_0 k_0 \in H \times K ; f(h_0 k_0) = (h_0, k_0)$

. ليكن: $h_2 . h_1 \in H \times K$ فنجد أن f تطبيق متباين:

$h_0 . k_0 = h_1 . k_1 \Leftrightarrow h_0 = h_1 , k_0 = k_1$

$\Leftrightarrow (h_0, k_0) = (h_1, k_1)$

$\Leftrightarrow f(h_0 k_0) = f(h_1 . k_1)$

. كما أنّ: f غامر لأنّ: $(x, y) \in H \oplus K$ فإنّ: $x \in H , y \in K$

يوجد $x \; y \in H \times K$ بحيث: $f(xy) = (x, y)$

. كما أنّ f تشاكل لأنّ:

$f(h_0 k_0 h_1 k_1) \overset{?}{=} f(h_0 h_1 k_0 k_1) = (h_0 h_1 , k_0 k_1)$

$= (h_0, k_0)(h_1, k_1)$

$= f(h_0 k_0) f(h_1 k_1)$

ومما سبق نجد أنّ: f ~~[illegible]~~ تشاكل وبالتالي: $H \times K \cong H \oplus K$

مبرهنة: لتكن G زمرة و H, K زمر جزئية ناظمية في G ولنفرض

أنّ: $G = H \times K$ عندئذٍ يوجد تشاكل غامر

$\pi_1 : G \longrightarrow H \; , \; \pi_2 : G \longrightarrow K$

الإثبات:

لنعرف العلاقة: $\pi_1 : G \to H$ بالشكل:

$\forall g \in G : g = h.k \,;\, h\in H, k\in K : \pi_1(g) = h$

ليكن $g_1, g_2 \in G$ بحيث: $g_1 = g_2$، وبالتالي يوجد $k_1, k_2 \in K$

، $h_1, h_2 \in H$ بحيث: $g_1 = h_1 k_1 , g_2 = h_2 k_2$

$h_1 . k_1 = h_2 . k_2 \Rightarrow h_1 = h_2 , k_1 = k_2$

$\Rightarrow \pi_1(g_1) = \pi_2(g_2)$

$\Rightarrow$ π_1 تطبيق

$\pi_1(g_1 g_2) = \pi_1(h_1 k_1 h_2 k_2) = \pi_1(h_1 h_2 k_1 k_2)$

$= h_1 h_2$

$= \pi_1(g_1)\, \pi_1(g_2)$

ومنه: π_1 تشاكل

ليكن $h_0 \in H$ عندئذٍ $h_0 = h_0 e \in H\times K$

بحيث: $\pi_1(h_0) = h_0$

ومنه: π_1 غامر

وبالمثل يمكن إثبات أن π_2 تشاكل زمري غامر.

وظيفة: أثبت أنَّ: $\ker(\pi_1) = K$

مبرهنة: لتكن G زمرة و K ، H زمر جزئية ناظمية في G

وأنَّ: $H\cap K = \langle e \rangle$ ، ولتكن L زمرة جزئية في G ، إذا كان

$G = H\times K$ عندئذٍ: $K\cap L$ ، $H\cap L$ زمر جزئية ناظمية في L

الإثبات:

$K\cap L \subset L$ $\phi \neq$ التقاطع زمرة جزئية، ليكن: $y\in L$ ولنبرهن:

أنَّ: $y(K\cap L)y^{-1} \subseteq K\cap L$

$\forall x \in y(K\cap L)y^{-1} \Rightarrow x = y g y^{-1} \,;\, g\in K\cap L,$

• بما أنَّ: K ناظمية في G فإنَّ:

$x = y . g . y^{-1} \in K$

ومن جهة أخرى لدينا: $g, y \in L$ أي: $x = gyg^{-1} \in L$ أي أصبح

لدينا: $x \in K \cap L$

ومنه نبين أن: $K \cap L$ زمرة جزئية ناظمية في: L

تمهيدية: لتكن $G = H \times K$ زمرة و L زمرة جزئية في G عندئذٍ:

$H \cap L$ زمرة جزئية ناظمية في: $\pi_H(L)$ (المسقط في H) وأيضاً

$K \cap L$ زمرة جزئية ناظمية في: $\pi_K(L)$ (المسقط في K).

تمرين: لتكن G زمرة تبديلية ولتكن: $n \in \mathbb{Z}^+$ أثبت أن المجموعة:

$$G^n = \{ g^n : g \in G , n \in \mathbb{Z} \}$$

زمرة جزئية في G

الحل:

$$e^n = e \in G \Rightarrow G^n \neq \phi$$

$$\forall g \in G \; ; g^n \in G \Rightarrow G^n \subseteq G$$

$$\forall a, b \in G \; ; \; a^n, b^n \in G^n : a^n . b^{-n} \in G$$

وذلك لأن:

$$a, b \in G \Rightarrow a . b^{-1} \in G$$

$$\Rightarrow (a . b^{-1})^n \in G^n \Rightarrow a^n . b^{-n} \in G^n$$

ومنه تكون G زمرة جزئية في G.

انتهت المحاضرة