الثلاثاء: 2/11/2014

المحاضرة السادسة عشرة

تتمة النتيجة $\boxed{4}$ من المحاضرة السابقة: تصنيف النقاط الشاذة:

ليكن $\vec{r}(t) \longrightarrow t$ تمثيلاً وسيطياً لمنحنٍ L ، p_0 نقطة من L مقابلة لـ t_0 أي

$\vec{op_0} = \vec{r}(t_0)$

لنفرض أنّ $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{0} \Leftarrow p_0$ نقطة شاذة بالنسبة للتمثيل $\vec{r}$

وسنفرض أنّ المشتقات من مراتب عليا لـ $\vec{r}$ موجودة عند t_0 وليست جميعها معدومة.

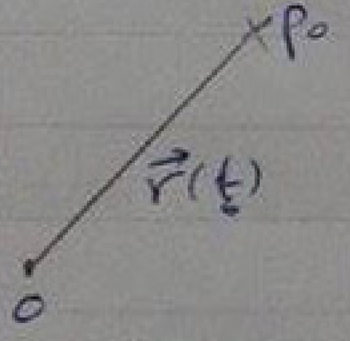
لندرس حالتين:

$\boxed{1}$ لنفرض أن أول مشتق لـ $\vec{r}$ غير معدوم عند t_0 من مرتبة زوجية ولتكن $2k$

عندئذٍ يكون منشور تايلور لـ $\vec{r}$ من المرتبة $(2k)$ في جوار الـ t_0 هو:

$$\vec{r}(t_0+h) = \vec{r}(t_0) + h^{2k}\frac{\vec{r}^{(2k)}(t_0)}{(2k)!} + \vec{o}(h^{2k})$$

إن المتجه $\vec{r}(t_0+h)$ هو عبارة عن متجه موضع لنقطة من المنحني ولتكن p متحركة على المنحني ومجاورة للنقطة p_0



أي إن (t_0+h) صورتها عبارة عن نقطة أخرى من المنحني نرمز لها بـ $\vec{op}$ ومنه

$$\vec{op} = \vec{r}(t_0+h) = \vec{op_0} + \vec{v_1} + \vec{v_2}$$

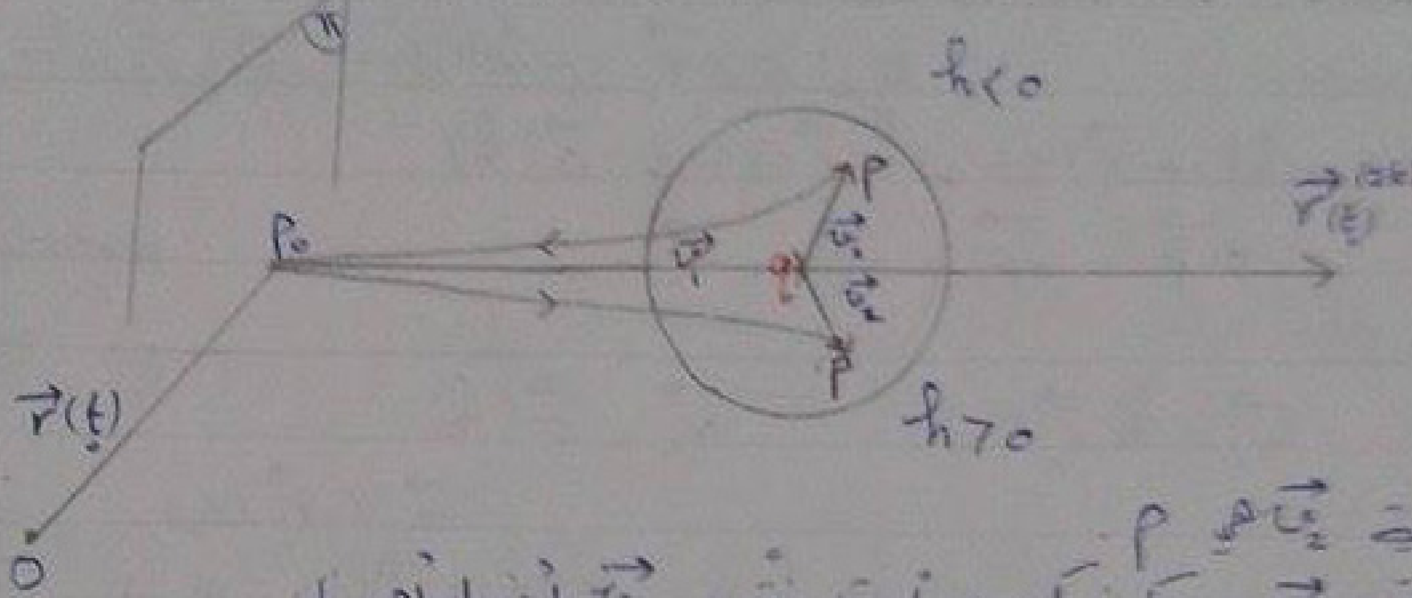
حيث:

$$(1)\quad \vec{v_1} = \frac{h^{2k}}{(2k)!}\vec{r}^{(2k)}(t_0) \quad , \quad \vec{v_2} = \vec{o}(h^{2k})$$

إنّ: $\vec{v_1} \parallel \vec{r}^{(2k)}(t_0)$ وضوحاً من العلاقة (1)

و $\vec{v_1}$ له جهة $\vec{r}^{(2k)}(t_0)$ أيضاً لأنّ: $\frac{h^{2k}}{(2k)!} > 0$

المتجهان متوازيان ولهما نفس الاتجاه



نهاية $\vec{\varepsilon}_2$ هي م.

أي أن المتجه $\vec{\varepsilon}_1$ سيكون كبيرًا جدًا مقارنة بـ $\vec{\varepsilon}_2$ لأنه لما

متجه ثابت يعني أنه $\frac{\vec{\varepsilon}_1}{h^{2k}} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{(2k)!}\vec{r}^{(2k)}(t_0) \neq \vec{0}$ (فرضاً)

$$\frac{\vec{\varepsilon}_2}{h^{2k}} = \frac{\vec{o}(h^{2k})}{h^{2k}} \xrightarrow[h\to 0]{} \vec{0} \qquad (م \to م_0)$$

أي أن المتجه $\vec{\varepsilon}_2$ سيكون صغيرًا جدًا مقارنة بـ $\vec{\varepsilon}_1$ وهذا يعني أن نهاية $\vec{\varepsilon}_2$ قريبة من نهاية $\vec{\varepsilon}_1$

إذا أخذنا مستوي π عمودي على $\vec{r}^{(2k)}(t_0)$ (أي على $\vec{\varepsilon}_1$) في النقطة م٠ فإن $\vec{\varepsilon}_2$ مستحيل أن يقطع هذا المستوي لأن $\vec{\varepsilon}_2$ أصغر بكثير من $\vec{\varepsilon}_1$.

هنا $h \xrightarrow{<} 0$ أي $h<0$ ، t_0+h ⟸ م تأتي على المنحني قبل م٠ (الوسيط المقابل لـ م أصغر من الوسيط المقابل لـ م٠).

في هذه الحالة نسمي النقطة م٠ نقطة تراجع (قرنة)، ويكون فرعا المنحني في جوار م٠ (الفرع الذي قبل م٠ المقابل $h<0$) و(الفرع الذي بعد م٠ المقابل $h>0$) يقعان في الجهة ذاتها بالنسبة لمستوي π المماس لها في النقطة م٠

لنثبت أن م٠ نقطة شاذة أساسيًا في هذه الحالة:

نفترض جدلاً أن م٠ ليست شاذة أساسية ⟸ م٠ نقطة شاذة في التمثيل الطبيعي

⟸ $\vec{r}_1'(s_0)$ (حيث s_0 قيمة الوسيط الطبيعي المقابل لـ م٠) متجه واحدة حسب مبرهنة سابقة

(h طول القوس بين p_0 , p)

لنأخذ منشور تايلور للتمثيل الطبيعي $\vec r_1$ في جوار الـ s_0:

$$\vec r_1(s_0+h) = \vec r_1(s_0) + h\,\vec r_1'(s_0) + \vec o(h)$$

بنفس الأسلوب:

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec w_1 + \vec w_2$$

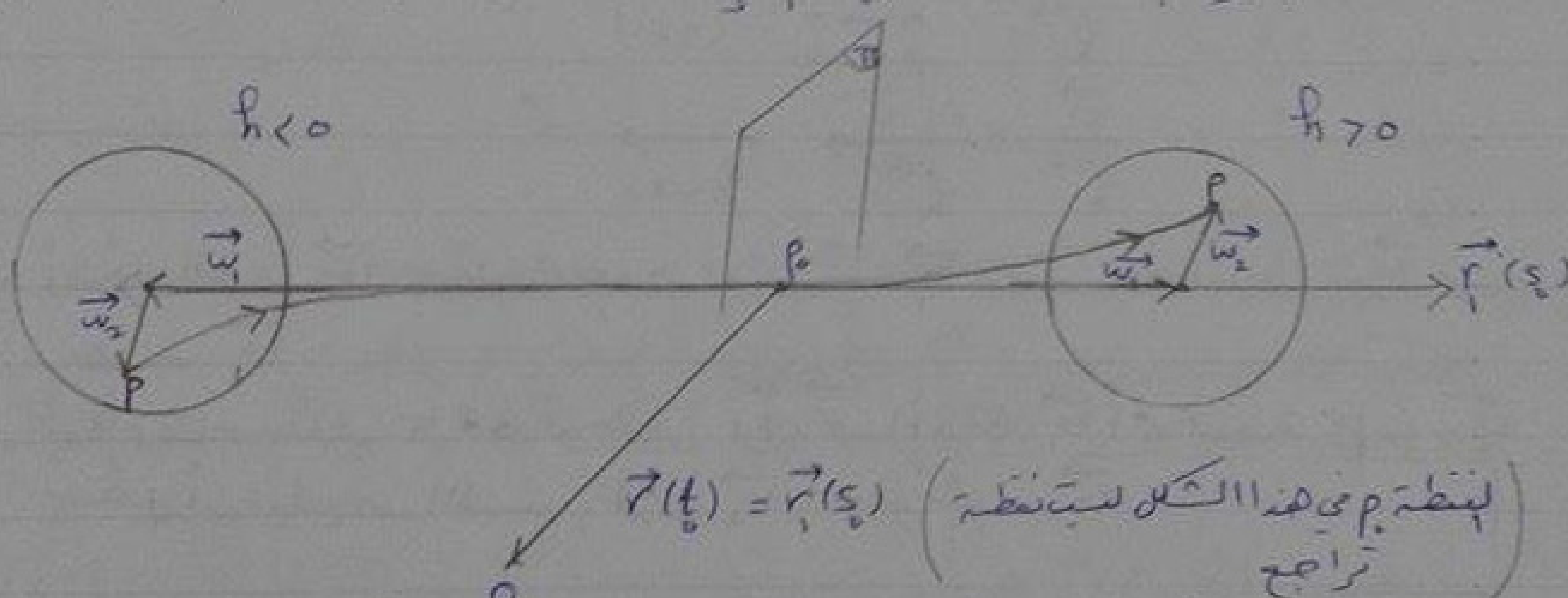
حيث

$$\vec w_1 = h\,\vec r_1'(s_0) \qquad \vec w_2 = \vec o(h)$$

إذن: $\vec w_1 \parallel \vec r_1'(s_0)$

و $\vec w_1$ ← له جهة $\vec r_1'(s_0)$ إذا كانت $h>0$ (أي النقطة p بعد p_0 على المنحني).

← وله جهة معاكسة لـ $\vec r_1'(s_0)$ إذا كانت $h<0$ (النقطة p قبل p_0 على المنحني)



(النقطة p_0 في هذا الشكل ليست نقطة تراجع)

$\vec w_2$ صغير جداً بالنسبة لـ $\vec w_1$ في كلا الحالتين (إذا كانت h موجبة أو سالبة) بأن النقطة p ستقع في نهاية $\vec w_1$

نستنتج أن فرعي المنحني في جوار p_0 واقعان في جهتين مختلفتين بالنسبة للمستوي π العامودي على المماس في النقطة p_0

وهذا تناقض (وسبب التناقض افتراض أن p_0 نقطة شاذة غير أساسية)

⇐ p_0 نقطة شاذة أساسية.

[2] لنفترض أن مرتبة أول مشتق لـ $\vec r$ غير معدوم عند t_0 هي مرتبة فردية أي $(2k+1)$.

(ولنثبت أن النقطة p_0 شاذة غير أساسية)

عندئذٍ يكون منشور تايلور لـ $\vec r$ من المرتبة $(2k+1)$ في جوار الـ t_0 هو:

$$\vec r(t)=\vec r(t_0)+\frac{(t-t_0)^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\vec r^{\,(2k+1)}(t_0)+o\left((t-t_0)^{2k+1}\right)$$

حيث $h=t-t_0$

لنأخذ تمثيل آخر لهذا المنحني:

$$t=\phi(\tau)=t_0+\sqrt[2k+1]{\tau}$$

دالة مستمرة ومتزايدة تماماً

ويكون:

$$\vec r^{\,*}(\tau)=\vec r(\phi(\tau))=\underbrace{\vec r(t_0)}_{\vec{OP_0}}+\frac{\tau}{(2k+1)!}\,\vec r^{\,(2k+1)}(t_0)+\vec o(\tau)$$

$\vec r^{\,*}$ يكافئ $\vec r$ بناءً

إن P_0 يقابل القيمة $\tau=0$

$$\vec r^{\,*}(0)=\vec r(\phi(0))=\vec r(t_0)\Rightarrow \vec r^{\,*}(0)=\vec{OP_0}$$

$$\frac{\vec r^{\,*}(\tau)-\vec r^{\,*}(0)}{\tau}=\frac{1}{(2k+1)!}\,\vec r^{\,(2k+1)}(t_0)+\frac{\vec o(\tau)}{\tau}\xrightarrow[\tau\to 0]{}0$$

نأخذ النهاية للطرفين عندما $\tau\to 0$ فإن الطرف الأيمن سيسعى إلى

(فرضاً) $\frac{1}{(2k+1)!}\,\vec r^{\,(2k+1)}(t_0)\neq\vec 0$ والطرف الأيسر سيسعى إلى

$$\vec r^{\,*\prime}(0)=\frac{d\vec r^{\,*}(0)}{d\tau}=\frac{1}{(2k+1)!}\,\vec r^{\,(2k+1)}(t_0)\neq\vec 0$$

مما سبق نجد أن $\vec r^{\,*}$ تمثيل لـ L (مكافئ لـ $\vec r$)

ومشتقه الأول عند قيمة الوسيط المقابل لـ t_0 موجود ولا يساوي الصفر

$\Leftarrow$ P_0 نظامية في التمثيل $\vec r^{\,*}$

$\Leftarrow$ P_0 نقطة شاذة غير أساسية للمنحني L

نلاحظ أننا برهنا:

إذا كانت رتبة أول مشتق لـ $\vec r$ غير معدوم عند النقطة P_0 هي رتبة زوجية $\Leftarrow$ النقطة شاذة أساسية:

يكون قد برهنا:

إذا كانت النقطة ليست شاذة أساسية $\Leftarrow$ مرتبة أول مشتق غير معدوم لـ $\vec{r}$ عند p هي مرتبة زوجية

لأن $(p \longrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \longrightarrow \sim p)$

وبالتالي نحصل على:

لتكن p نقطة شاذة في تمثيل $\vec{r}$ $(\vec{r}'(t_p) = \vec{0})$ عندئذٍ:

- تكون هذه النقطة شاذة أساسية إذا وفقط إذا كانت مرتبة أول مشتق لـ $\vec{r}$ غير معدوم عند t_p هي مرتبة زوجية.
- وتكون هذه النقطة شاذة غير أساسية إذا وفقط إذا كانت مرتبة أول مشتق لـ $\vec{r}$ غير معدوم (بعد المشتق الأول) عند t_p هي مرتبة فردية.

لأن نقطة شاذة حتماً المشتق الأول معدوم

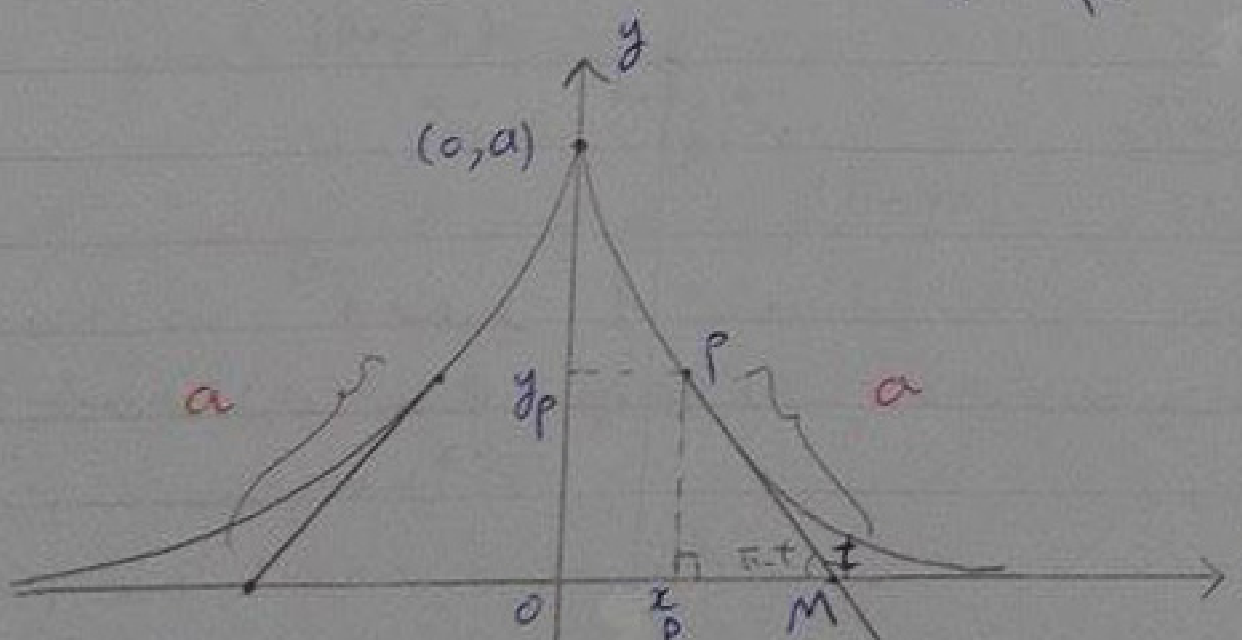
مثال:

المنحني السحبي:

تعريف: هو منحني مستوي (ليس فراغي) يحقق الخاصة التالية:

للقطعة المستقيمة من مماسه المحددة بنقطة التماس p وبنقطة تقاطع هذا المماس مع مستقيم ثابت في مستويه طول ثابت، سنرمز لهذا الطول بـ a.

ولنفرض أن المستقيم الثابت هو المحور $\vec{ox}$. (ليس بالضرورة أن يكون المستقيم الثابت $\vec{ox}$)



لنفرض أن t هي الزاوية بين $\vec{ox}^+$ و $\vec{Mp}$

بيان المعادلات التالية : $\begin{cases} x = a\left(\cos t + \ln\left(tg\frac{t}{2}\right)\right) \\ y = a\sin t \\ z = 0 \end{cases}$ $\quad 0 < t < \pi$

ستكون معادلات وسيطية للمنحني المسحبي (أثبت ذلك)

أو بشكل مكافئ :

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(a\left(\cos t + \ln\left(tg\frac{t}{2}\right)\right), a\sin t, 0\right)$$

$$y_p = a\sin(\pi - t) = a\sin t$$

بدون رسم :

و $z_p = 0$ كون المسحبي واقع في المستوي oxy

(تقدم إثبات x_p) باستخدام من الحل

ملاحظة :

- عندما $t \to 0$ فإنه من المعادلات الوسيطية :

$$y \to 0 \quad , \quad x \to -\infty$$

هذا يعني أنه $y = 0$ مقارب للمسحبي في جوار $-\infty$

- وعندما $t \to \pi$ فإن :

$$y \to 0 \quad , \quad x \to +\infty$$

أي أنه $y = 0$ مقارب للمسحبي في جوار $+\infty$

تمرين وظيفة :

أوجد النقاط الشاذة للمسحبي ؟ وعين نوع هذه النقاط ؟