الثلاثاء : 25/11/2014

المحاضرة الرابعة عشر:

اثبات الاتجاه الثاني من البرهنة السابقة:

البرهنة:

إذا كان L_1, L_2 منحنيان نظاميان من الصنف C^{n+1} و

$s \longrightarrow \vec{r}_1(s)$ تمثيل طبيعي لـ L_1

$\sigma \longrightarrow \vec{r}_2(\sigma)$ تمثيل طبيعي لـ L_2 ; $(\vec{OP_0} = \vec{r}_1(s_0) = \vec{r}_2(\sigma_0))$

و L_1, L_2 تلاقيا من الرتبة n عند P_0 إذا وفقط إذا تحقق:

$$(*)\quad \vec{r}_1(s_0) = \vec{r}_2(\sigma_0)\ ,\ \vec{r}_1'(s_0) = \vec{r}_2'(\sigma_0)\ ,\ \dots\ ,\ \vec{r}_1^{(n)}(s_0) = \vec{r}_2^{(n)}(\sigma_0)$$

$$\vec{r}_1^{(n+1)}(s_0) \neq \vec{r}_2^{(n+1)}(\sigma_0)$$

لنثبت أنّ L_1, L_2 تلاقيا من الرتبة n عند النقطة P_0.

من المحاضرة السابقة وجدنا أنّ:

$$\overrightarrow{P'P''} = (\vec{r}_2(\sigma_0) - \vec{r}_1(s_0)) + h(\vec{r}_2'(\sigma_0) - \vec{r}_1'(s_0)) + \dots + \frac{h^n}{n!}(\vec{r}_2^{(n)}(\sigma_0) - \vec{r}_1^{(n)}(s_0))$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}(\vec{r}_2^{(n+1)}(\sigma_0) - \vec{r}_1^{(n+1)}(s_0)) + o(h^{n+1}) \qquad (**)$$

من $(*)$ وبالتعويض في $(**)$ نجد أنّ:

$$\overrightarrow{P'P''} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}(\vec{r}_2^{(n+1)}(\sigma_0) - \vec{r}_1^{(n+1)}(s_0)) + o(h^{n+1})$$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{P'P''}}{h^n} = \frac{h}{(n+1)!}(\vec{r}_2^{(n+1)}(\sigma_0) - \vec{r}_1^{(n+1)}(s_0)) + \frac{o(h^{n+1})}{h^n}$$

$h \to 0$; $\frac{o(h^{n+1})}{h^n} \to 0$ ($h \to 0$)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\overrightarrow{P'P''}}{h^n} \xrightarrow[h\to 0]{} 0}$$

(1)

$$\frac{\overrightarrow{P'P''}}{h^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\left(\vec{r}_2^{(n+1)}(\alpha_0) - \vec{r}_1^{(n+1)}(\xi_0)\right) + \frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(\vec{r}_0^{(n+1)}(\alpha_0) - \vec{r}_1^{(n+1)}(\xi_0)\right) \qquad h \to 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\overrightarrow{P'P''}}{h^{n+1}} \not\longrightarrow 0 \quad (h \to 0)} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن المنحنيين L_1, L_2 تلامس من المرتبة n عند النقطة P_0

نتيجة:

لتكن: $x \longmapsto f_1(x)$ ، $x \longmapsto f_2(x)$ دالتين من الصف C^{n+1}

ولتكن L_i هو بيان لـ f_i حيث $(i = 1,2)$

L_1, L_2 تلامس من المرتبة n عند النقطة $P_0(x_0, f(x_0))$ إذا وفقط إذا تحقق:

$$f_1(x_0) = f_2(x_0),\ f_1'(x_0) = f_2'(x_0),\ \dots,\ f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0)$$

$$f_1^{(n+1)}(x_0) \neq f_2^{(n+1)}(x_0)$$

أمثلة:

هل يوجد كل من المنحنيين التاليين تلامس عند المبدأ من أي مرتبة في حال وجوده؟

1- $f_1(x) = 0$ ، $f_2(x) = x^2$

$L_1 = ox$ ، $L_2 =$ قطع مكافئ

f_1, f_2 من الصف C^∞ معرفتان

$$f_1(0) = f_2(0) = 0$$

$$f_1'(0) = 0 = 2(0) = f_2'(0)$$

$$f_1''(0) = 0 \neq 2 = f_2''(0)$$

$\Longrightarrow$ يوجد تلامس بين القطع المكافئ ومحور ox من المرتبة الأولى

ملاحظة: القاطع لهذين الشكلين يقطع المنحنيين أما المماس فلا يشكل زاوية.

2. $f_1(x) = 0$, $f_3(x) = x^3$

f_1 هو ox ، f_3 هو ox

$f_3(0) = 0 = f_1(0)$

$f_3'(0) = 0 = f_1'(0)$

$f_3''(0) = 0 = f_1''(0)$; $f_3'''(0) = 6 \neq 0 = f_1'''(0)$

$\Leftarrow$ ox هو f_3 ، ox هو f_1 تكاملان عند البدأ من المرتبة الثانية

3. $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2$

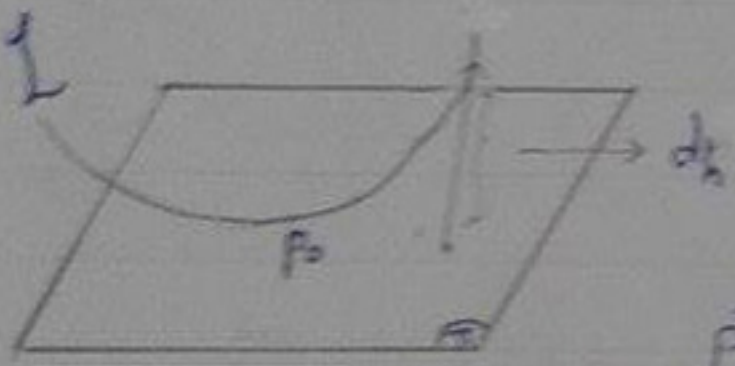
$f_1(0) = 0 = f_2(0)$, $f_1'(0) = 0 = f_2'(0)$

$f_1''(0) = 0 \neq 2 = f_2''(0)$

$\Leftarrow$ f_1 و f_2 تكاملان من المرتبة الأولى عند البدأ.

تعريف (المماس لمنحنى في نقطة):

لكن P_0 نقطة مشتركة بين المستوي π و المنحنى L ، نفترض أن P نقطة متحركة على المنحنى L ، و لتكن d_h هو البعد بين P و المستوي π



حيث h هي القياس الجبري لطول القوس $\overset{\frown}{P_0P}$

نقول إن المنحنى L و المستوي π تكاملان من المرتبة n على الأقل عند النقطة P_0 إذا كان:

$d_h = o(h^n)$ حوار $h = 0$ أي $h \to 0$ أو $P \to P_0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{d_h}{h^n} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

مثال:

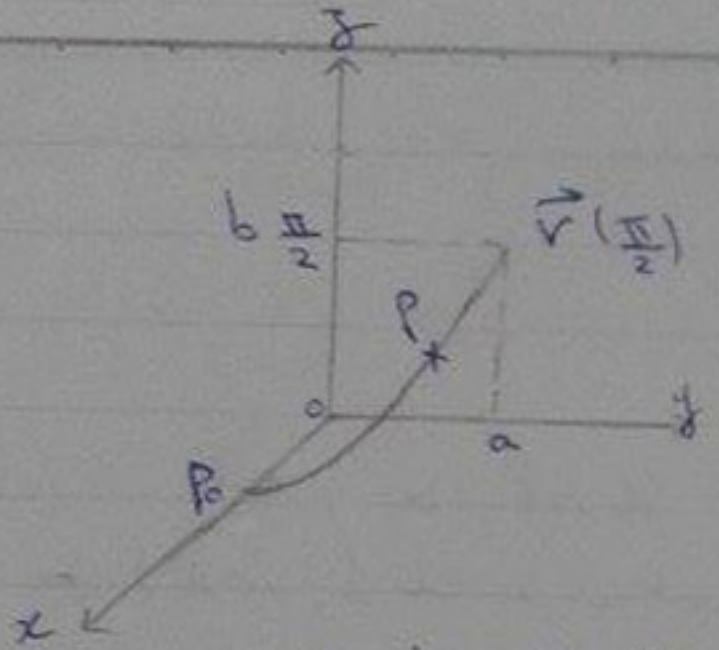
هل يوجد تكامل بين المستوي $\pi : az - by = 0$ و المنحنى المعرف بـ:

$L : \vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$; $t \in \mathbb{R}$

عند النقطة $P_0 = (a, 0, 0)$ ومن أي مرتبة في حال وجوده ؟

π معادلة مستوي يشمل المحور ox (لعدم وجود المتحول x في المعادلة)

$\vec{r}(0) = (a, 0, 0) = \vec{oP_0}$



$\vec{r}(\frac{\pi}{2}) = (a, a, b\frac{\pi}{2})$

لنأخذ النقطة P نقطة متحركة على المنحنى
متجه الموضع لها هو $\vec{r}(t)$، والمسافة
لهذه القوس P_0P

$$h = \int_0^t \|\vec{r}'(u)\| du = \sqrt{a^2+b^2}\, t$$

إذا كان المستوى يمر بالنقطة (x_0, y_0, z_0) معادلته $ax+by+cz+D=0$
فإن بعد

$$d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+D|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

بعد النقطة P عن المستوى π

$$d_h = \frac{|az_p - by_p|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|abt - ab\sin t|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{d_h}{h} = \frac{a|b|\,|t-\sin t|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}\,.\,t}$$

$$= \frac{a|b|}{(a^2+b^2)} \frac{|t-\sin t|}{t}$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots$$

$$-t < \sin t < t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin t < t & ; \quad t > 0 \\ \sin t > t & ; \quad t < 0 \end{cases}$$

$$t \to 0 \Leftarrow h \to 0$$

$$\frac{dh}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{a|b|}{(a^2+b^2)} \lim_{t \to 0} \frac{t-\sin t}{t}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{t-\sin t}{t} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

عدم تعيين

$$\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{1}=0$$

حسب أوستيال

بالمثل نجد:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t}=0 \Longrightarrow \frac{d_h}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

$\Leftarrow$ L مماس المستوي π تلامس من الرتبة الأولى على الأقل عند النقطة $P_0(a,0,0)$

- لبرهنة وجود تلامس من الرتبة الثانية على الأقل للمستوي π والمنحني نقوم بحساب الكتابة.

$$\lim_{h\to 0}\frac{d_h}{h^2}=\lim_{t\to 0}\frac{a|b|}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{|t-\sin t|}{t^2}=\frac{a|b|}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\lim_{t\to 0}\frac{|t-\sin t|}{t^2}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{|t-\sin t|}{t^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)\ \text{عدم تعيين}$$

حسب أوستيال: عدم تعيين $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{2t}$$

حسب أوستيال مرة ثانية:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2}=0$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^2}=0$$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{d_h}{h^2}=0$$

$\Leftarrow$ L مماس المستوي π تلامس من الرتبة الثانية على الأقل عند النقطة $P_0(a,0,0)$