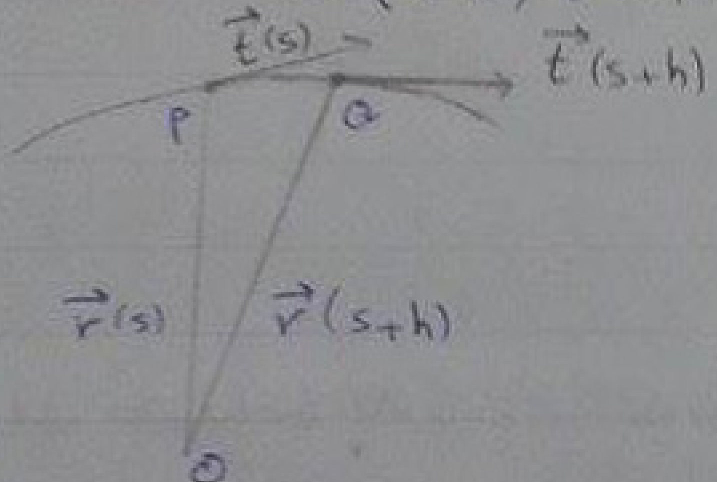
الأحد: 14/12/2014

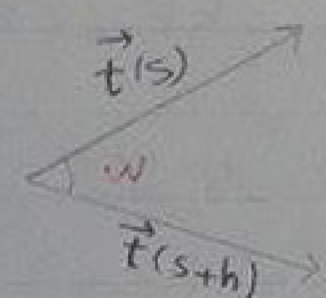
المحاضرة التاسعة عشر:

- تقوس منحني -

تعريف:

ليكن $\vec{r}(s) \longrightarrow s$ تمثيلاً طبيعياً لمنحنٍ ما، ولتكن p نقطة نظامية مقابلة للوسيط s، ولتكن Q نقطة متحركة على المنحني ونظامية (لضمان وجود متجه واحد لمماس عند هذه النقطة) ومقابلة لقيمة الوسيط $s+h$، ولتكن w هي الزاوية بين متجهي واحدة المماس في النقطتين Q، p أي $w = \angle \vec{t}(s), \vec{t}(s+h) >$





عندئذٍ نسمي النهاية:

$$\lim_{h \to 0} \frac{w}{|h|}$$ في حال وجودها بتقوس المنحني عند النقطة p

مبرهنة: جميع النقاط نظامية

يوجد في كل نقطة من منحنٍ نظامي من الصنف C_2 تقوس مساوي لـ

$k = \|\ddot{\vec{r}}\|$ ← رمز التقوس

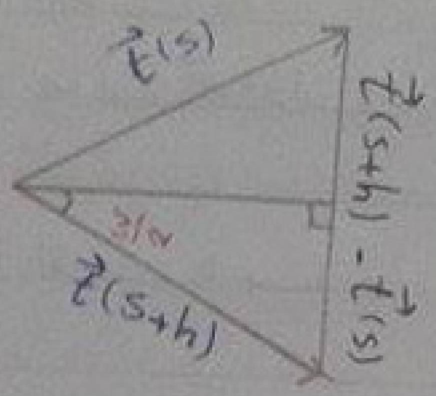
الإثبات:

لما كان

$$w = \angle(\vec{t}(s), \vec{t}(s+h))$$

ولنثبت أن:

$$\lim_{h \to 0} \frac{w}{|h|} = \|\ddot{\vec{r}}(s)\|$$



الارتفاع في المثلث المتساوي الساقين هو متوسط ومنصف لزاوية الرأس

$$\rightarrow \frac{\|\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)\|}{2}$$

وبقياس الشكل.

$$\frac{\|\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)\|}{2} = \|\vec{t}(s+h)\| . \sin\frac{w}{2}$$

لكن $\|\vec{t}(s+h)\| = 1$ لأن $\vec{t}$ شعاع واحدة.

$$\Rightarrow \|\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)\| = 2.\sin\frac{w}{2} \quad (*)$$

وبالتالي:

$$\frac{w}{|h|} = \frac{w}{2\sin\frac{w}{2}} . \frac{2.\sin\frac{w}{2}}{|h|} \underset{(*)}{\overset{=}{\text{حسب}}} \frac{w}{2\sin\frac{w}{2}} . \frac{\|\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)\|}{|h|}$$

$$\lim_{w\to 0} \frac{\frac{w}{2}}{\sin\frac{w}{2}} = 1$$

$$= \frac{\frac{w}{2}}{\sin\frac{w}{2}} \left\| \frac{\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)}{h} \right\|$$

وعندما $h \to 0 \Leftarrow w \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{w}{|h|} \overset{(1)}{=} \left\| \lim_{h\to 0} \frac{\vec{t}(s+h)-\vec{t}(s)}{h} \right\| = \|\vec{t}\,'(s)\|$$

لكن

$$\vec{t}(s) = \vec{r}\,'(s) \Rightarrow \vec{t}\,'(s) = \vec{r}\,''(s)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{w}{|h|} = \|\vec{r}\,''(s)\| = k$$

وهو المطلوب

مبرهنة:

إذا كان $t \to \vec{r}(t)$ تمثيلاً وسيطياً من الصف C_2 لمنحنٍ L فإن التقوس لـ L عند نقطة نظامية p من L يعطى بالمساواة:

$$k = \frac{\|\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''\|}{\|\vec{r}\,'\|^3}$$

الإثبات:

من المبرهنة السابقة لدينا:

$$k = \|\ddot{\vec{r}}\|$$

ووجدنا سابقاً:

$$\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,'' = (S')^3 \, (\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}})$$ صحيحة عند النقاط النظامية

$$\|\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''\| = (S')^3 \, \|\dot{\vec{r}} \wedge \ddot{\vec{r}}\|$$

$$= \|\vec{r}\,'\|^3 \; \underbrace{\|\dot{\vec{r}}\|}_{1} \cdot \|\ddot{\vec{r}}\| \, \underbrace{\sin(\underbrace{\widehat{\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}}}_{\frac{\pi}{2}})}_{1}$$

$$= \|\vec{r}\,'\|^3 \; \|\ddot{\vec{r}}\| = \|\vec{r}\,'\|^3 \, k$$

بتقسيم الطرفين على $\|\vec{r}\,'\|^3$:

$$k = \frac{\|\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''\|}{\|\vec{r}\,'\|^3}$$ وهو المطلوب

نتائج وملاحظات:

1. إذا كان $t \to \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ تمثيلاً وسيطياً من الصف C_2 لمنحنٍ مستوٍ فإن التقوس لهذا المنحني في نقطة نظامية منه يعطى بالمساواة:

$$k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

2. إن التقوس لدائرة في نقطة نظامية منها مساوٍ لمقلوب نصف قطر هذه الدائرة

دائرة مركزها (x_0, y_0) ونصف قطرها a

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a\cos t \\ y &= y_0 + a\sin t \end{aligned}\right\}$$

بالاشتقاق والتعويض في (1)

$$k = \frac{|(-a\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t)\cdot(-a\cos t)|}{(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^2}{(a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a}$$

مبرهنة:

ليكن L منحنياً نظامياً من الصف C_2 عندئذ

L منحني مستقيم $\Leftrightarrow$ التقوس في كل نقطة من نقاط L معدوم أي $k=0$ في كل نقاط L

الدكتور لم يقم بالإثبات لكنه موجود في الكتاب

الإثبات:

لزوم الشرط: ($\Rightarrow$)

إذا كان L مستقيماً فإنه يمثل بـ $t \longrightarrow \vec{r}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$

وعندئذ

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

ومنه

$$k = \|\dot{\vec{t}}\| = 0$$

كفاية الشرط: ($\Leftarrow$)

إذا كان $k=0$ فإن $\dot{\vec{t}} = \vec{0}$ وبالمكاملة نجد $\vec{t} = \vec{a}$ حيث $\vec{a}$ ثابت

ولما كان $\vec{t} = \dot{\vec{r}}$ فبالمكاملة مرة أخرى نجد أن

$$\vec{r} = \vec{a}s + \vec{b} \quad , \quad \vec{b} \text{ ثابت}$$

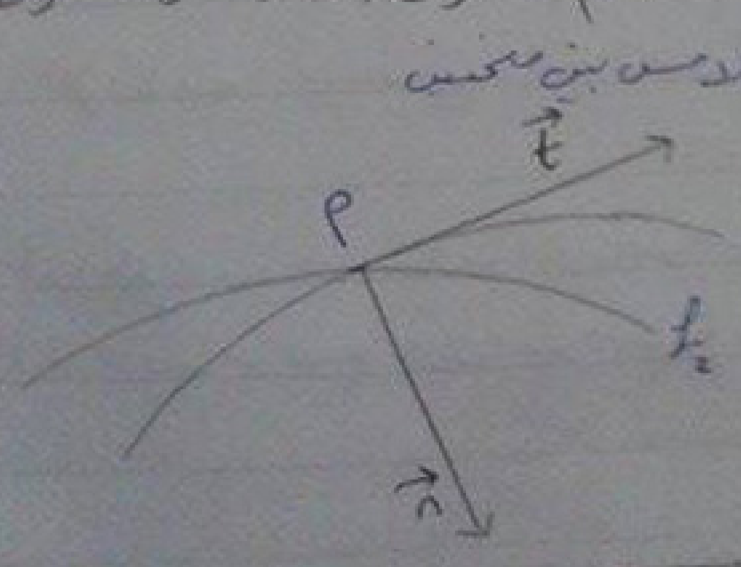
أي أن L هو مستقيم يمر بالنقطة التي متجه موضعها $\vec{b}$ ويوازي المتجه $\vec{a}$.

تمرين:

ليكن L_1, L_2 منحنيين من الصف C_2 ، p نقطة مشتركة بينهما

أثبت أن لـ L_1, L_2 تلامس من المرتبة الثانية على الأقل عند p إذا وفقط إذا كان لـ L_1, L_2 متجه واحدة مماس مشترك ومتجه واحدة ناظم مشترك وتقوس مشترك عند النقطة p

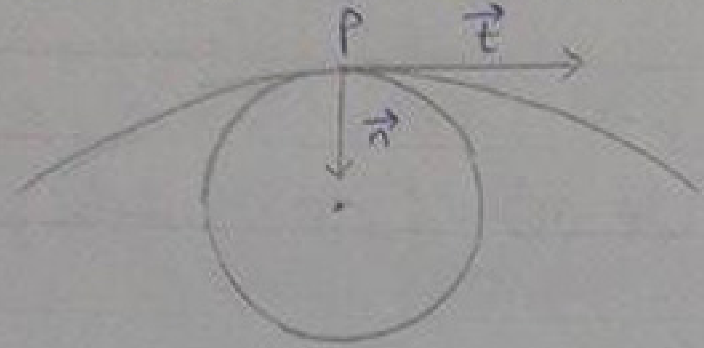
ملحوظة بالاستفادة من التلامس بين منحنيين



تعريف دائرة التقوس للمنحنى :

تسمى الدائرة التي لها تلامس مع منحنى L من المرتبة الثانية على الأقل عند نقطة P بدائرة التقوس (الدائرة الملاصقة لـ L عند P) ويسمى مركزها بمركز تقوس المنحنى عند P.

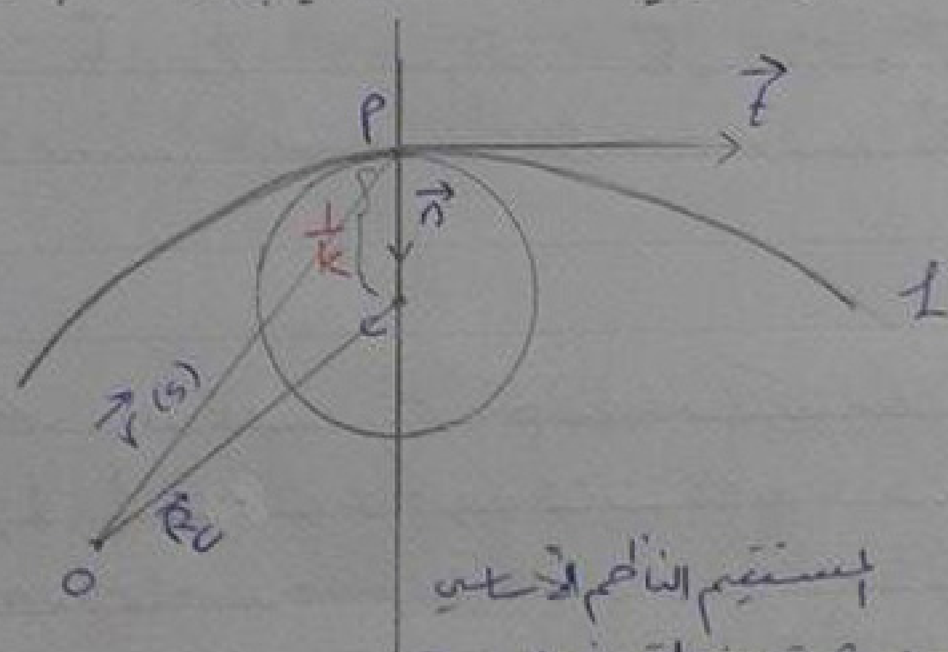
النواظم مع المماس في دائرة تتقاطع في المركز



مبرهنة:

$\vec{r} \neq \vec{0}$

يوجد في كل نقطة نظامية وغير منعدمة التقوس ($k \neq 0$) من منحنى من الصنف C_3 دائرة تقوس واقعة في المستوي الملاصق للمنحني عند النقطة (ولها تلامس من المرتبة الثانية على الأقل مع المنحني) ونصف قطرها يساوي مقلوب تقوس المنحني عند تلك النقطة ومركز تقوسها يقع على الناظم الأساسي للمنحني في تلك النقطة وفي جهة متجه وحدة الناظم الأساسي



الإثبات: يستنتج مباشرة من المبرهنة السابقة

- إذا طُلب منا متجه موضع مركز تقوس منحني L عند نقطة نجيب عليه كما يلي : من الرسم السابقة :

إن متجه موضع مركز تقوس المنحني L هو $\vec{OC}$ ونرمز له بـ $\vec{R_c}$

$$\vec{R}_c = \vec{OC}$$

$$\vec{R}_c = \vec{op} + \vec{pc}$$

ومنه:

لكن $\vec{op} = \vec{r}(s)$

ولدينا $\Leftarrow \vec{pc} \parallel \vec{n}(s)$

$$\vec{pc} = \lambda \vec{n}(s)$$

$$\|\vec{pc}\| = \|\lambda \vec{n}\| = \frac{1}{k(s)} \Rightarrow |\lambda| \, \|\vec{n}(s)\| = \frac{1}{k(s)} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{k(s)}$$

$$\vec{pc} = \frac{1}{k(s)} \vec{n}(s)$$

وبالتالي:

وبالتالي يكون متجه موضع مركز تقوس المنحني عند p هو:

$$\vec{R}_c = \vec{r}(s) + \frac{1}{k(s)} \vec{n}(s)$$

وإذا كان $\mathcal{L}$ له أي تمثيل ليس بالضرورة طبيعياً فإن متجه موضع مركز تقوس المنحني عند p هو

$$\vec{R}_c = \vec{r}(t) + \frac{1}{k(t)} \vec{n}(t)$$

t مقابلة للنقطة p.

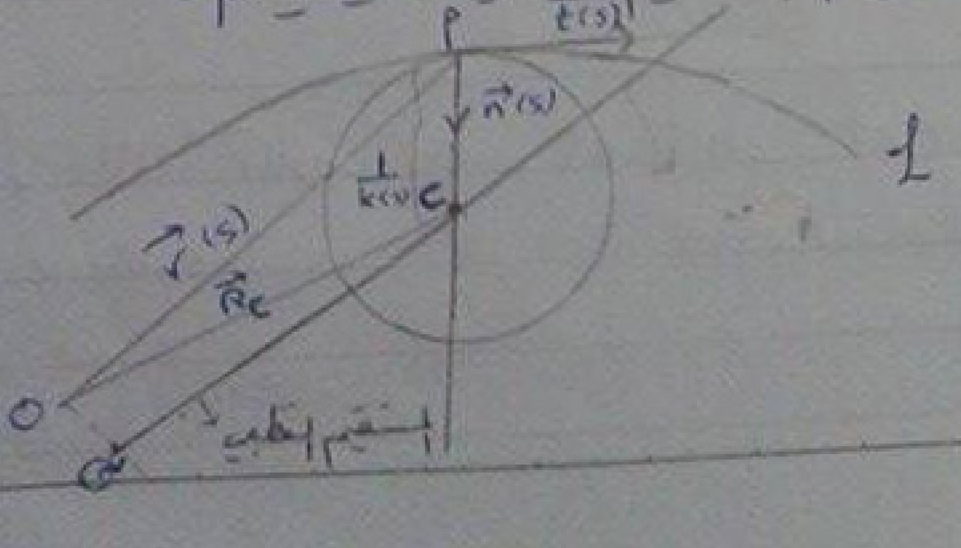
حيث النقطة p نظامية وغير منعدمة.

وإذا كان لدينا منحني نظامي وجميع نقاطه غير منعدمة عندئذٍ يوجد في كل نقطة من نقاطه دائرة تقوس ومركز تقوس، فعندما تتحرك النقطة على المنحني فإن مركز التقوس عند تلك النقطة سيتحرك ليرسم منحنياً ما، عندئذٍ لو طلب التمثيل الوسيطي لهذا المحل الهندسي سيكون نفس التمثيل السابق عند نقطة ما

$$\vec{R}_c(t) = \vec{r}(t) + \frac{1}{k(t)} \vec{n}(t)$$

تعريف:

نسمي المستقيم المار من مركز تقوس منحنٍ ما $\mathcal{L}$ في نقطة منه p والعمودي على المستوي الملاصق لـ $\mathcal{L}$ في p بالمستقيم القطبي للمنحني في p.



ولإيجاد التمثيل الوسيطي للمستقيم القطبي نأخذ نقطة Q كيفية على هذا المستقيم
فيكون متجه موضعها

$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PC} + \vec{CQ}$$

حيث

$$\vec{OP} = \vec{r}(s) \qquad \vec{PC} = \frac{1}{k(s)} \vec{n}(s)$$

لكن $\vec{CQ}$ عمودي على المستوي اللاصق $\Rightarrow \vec{CQ} \parallel \vec{b}(s) \Rightarrow \vec{CQ} = \lambda \vec{b}(s)$

λ وسيطاً معيناً

$$\Rightarrow \vec{OQ} = \vec{r}(s) + \frac{1}{k(s)} \vec{n}(s) + \lambda \vec{b}(s)$$

وقيمة الوسيط λ المقابلة للمركز (المركز نقطة من المستقيم القطبي) هي $\lambda = 0$

تمرين:

أوجد التقوس ومركز التقوس ودائرة التقوس والمستقيم القطبي للولب في نقطة كيفية منه.
إن جميع نقاط اللولب نظامية وغير منعدمة، لذلك فإن التقوس للولب موجود و
كذلك مركز التقوس والمستقيم القطبي موجود في كل نقطة من نقاطه.

التمثيل للولب هو:

$$\vec{r}: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty$$

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{(-a\sin t, a\cos t, b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\vec{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0) \Rightarrow \|\vec{r}''(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

التقوس يعطى بـ

$$k(t) = \frac{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3}$$

$$\vec{r}' \wedge \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$$k(t) = \frac{\sqrt{a^2b^2+a^4}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a\sqrt{b^2+a^2}}{a^2+b^2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{(a^2+b^2)}$$

وهو تقوس المنحني في نقطة كيفية منه.

مركز التقوس

$$\vec{OC} = \vec{r}(t) + \frac{1}{k}\vec{n} \quad *$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{r}' \wedge \vec{r}''}{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|} = \frac{(ab\sin t, -ab\cos t, a^2)}{a\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t, -b\cos t, a)$$

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b\sin t & -b\cos t & a \\ -a\sin t & a\cos t & b \end{vmatrix}$$

نعوض في المعادلة * نحصل على $\vec{OC}$

التمثيل الوسيطي للمستقيم القطبي عند نقطة كيفية $\vec{r}(t)$ من اللولب:

$$\vec{R}(\lambda) = \underset{\text{موجود}}{\vec{OC}} + \lambda \underset{\text{موجود}}{\vec{b}}$$

نعوض فقط

ملاحظة:
أوجد دائرة التقوس.

حيث يجب تعيين المستوي الملاصق.