المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات الرتبة العليا

الشكل العام لهذه المعادلة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = g(x) \quad \text{--- (1)}$$

طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج) هذه الطريقة تمكننا من إيجاد حل عام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (1). وذلك إذا علم n حلاً خطياً مستقلاً.

نفرض أن الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \quad \text{--- (2)}$$

هو:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n$$

حيث $y_1, y_2, \ldots, y_n$ حلول مستقلة للمعادلة المتجانسة (2)

لنفرض أننا استبدلنا الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ بدوال تابعة للمتغير من الشكل

$$c_1 = v_1(x) \qquad , c_2 = v_2(x) , \ldots , \quad c_n = v_n(x)$$

وسوف نحاول تحديد قيم $v_1, v_2, \ldots, v_n$

حتى يكون:

$$y = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x) + \cdots + v_n(x) y_n(x)$$

حل المعادلة التفاضلية غير المتجانسة وهذه الطريقة تعرف باسم

طريقة تحويل الثوابت

يمكن كتابة الحل السابق على الشكل التالي

$$y = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\, y_i(x)$$

بالاشتقاق

$$y' = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\, y_i' + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v_i'(x)\, y_i(x)}$$

Alamal

فنفرض يكون الحد الثاني

$$\sum_{i=1}^{n} v_i'(x)\, y_i(x) = 0 \quad \text{---} ③$$

وعليه

$$y' = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\, y_i'(x)$$

نشتق

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\, y_i''(x) + \sum_{i=1}^{n} v_i'(x)\, y_i'(x)$$

نجعل

$$\sum_{i=1}^{n} v_i'(x)\, y_i'(x) = 0$$

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\, y_i''(x)$$

وهكذا نستمر

$$y^{(n-1)} = \sum v_i(x)\, y_i^{(n-1)}(x)$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i'(x)\, y_i^{(n-2)}(x) = 0$$

وأخيراً

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\, y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} v_i'(x)\, y^{(n-1)}(x)$$

نعوض

$$y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$$

في المعادلة الأصلية

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} v_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} v_i(x) \left[a_0 y_i^{(n)} + a_1 y_i^{(n-1)} + \cdots + a_n y_i \right] = g(x)$$

ويمكن ملاحظة أن y_i حل للمعادلة التفاضلية المتجانسة لذا الحد الثاني يساوي الصفر:

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} v_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = g(x)$$

وبالتالي فإننا نلاحظ أنه: (حصلنا على حل من المعادلات التفاضلية

$$\sum_{i=1}^{n} V_i'(x)\, y_i(x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} V_i'(x)\, y_i'(x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} V_i'(x) \cdot y_i''(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} V_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = \frac{g(x)}{a_0}$$

ويمكن اعتبار هذه الحلول هي عبارة عن n معادلة جبرية في n مجهول ومحدد أمثالها هو محدد الحلول الأساسية المستقلة خطياً بمعنى أن محدد رونسكيان

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

وبما أن هذا المحدد $\neq 0$ لأنه محدد المعادلات غير متجانسة فإنه يكون للمجموعة حل وحيد غير الحل الصفري ، نحل هذه المعادلات الجبرية لنحصل على $V_1'(x), \ldots, V_n'(x)$ وبالتالي نكون قد عينا الحل الخاص ص خاص.

والحل العام هو الخاص + العام

تمت بحمد الله ...

تابع:

مثال: استخدم طريقة تحويل الثوابت (لاغرانج) لحل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' - 2y' + y = e^{3x}$$

الحل: (1) نوجد حل عام: $y'' - 2y' + y = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ مماثلة

حل عام للمعادلة التفاضلية المتجانسة $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$

(2) نوجد حل خاص بطريقة تحويل الثوابت.

حيث $c_1 = v_1(x)$, $c_2 = v_2(x)$ دوال قابلة للمفاضلة

$$\boxed{y_p = v_1(x) e^x + v_2(x) x e^x}$$

$$y_p' = v_1'(x) e^x + v_1(x) e^x + v_2(x) x e^x + v_2(x) e^x + v_2(x) x e^x.$$

$$v_1'(x) e^x + v_2'(x) x e^x = 0 \quad (1)$$

$$y_p' = v_1(x) e^x + v_2(x) e^x + v_2(x) x e^x$$

$$y_p'' = v_1'(x) e^x + v_1(x) e^x + v_2'(x) e^x + v_2(x) e^x + v_2'(x) x e^x + v_2(x) e^x + v_2(x) x e^x.$$

$$v_1'(x) e^x + v_2'(x) e^x + v_2'(x) x e^x = e^{2x} \quad (2)$$

$$v_1'(x) e^x + v_2'(x) x e^x = 0$$

$$-v_1'(x) e^x \mp v_2'(x) e^x \mp v_2(x) x e^x = -e^{2x}$$

بالطرح $v_2'(x) x e^x - v_2'(x) e^x - v_2(x) x e^x = -e^{2x}$

$$v_2'(x) e^x = e^{2x} \Rightarrow$$

$$\boxed{v_2'(x) = e^x} \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \boxed{v_2(x) = e^x}$$

Alamal

$$V_1'(x) = -xe^{x} \quad \overset{\text{بالتكامل}}{\Longrightarrow}$$

$$V_1(x) = -xe^{x} + e^{x}$$

الحل الخاص $\quad y_p = (-xe^{x} + e^{x})e^{x} + e^{x}x(e^{x})$

الحل الخاص

مع الحل الخاص والعام نحصل ع الحل العام للمعادلة التامة

مثال $\quad y'' + y' = \cos x$

الحل: $\quad y''' + y' = 0 \quad$ ①

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad , \lambda_2 = i \quad , \lambda_3 = -i$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

② إيجاد الحل الخاص $\qquad$ نجعل c دالة لـ x

$$y_p = c_1(x) + c_2(x)\cos x + c_3(x)\sin x$$

$$y_p' = c_1'(x) + c_2'(x)\cos x - c_2 \sin x + c_3' \sin x + c_3 \cos x$$

نفرض أن $\quad c_1'(x) + c_2'(x)\cos x + c_3' \sin x = 0$

$$y_p' = -c_2 \sin x + c_3 \cos x$$

$$y_p'' = -c_2' \sin x - c_2 \cos x + c_3' \cos x - c_3 \sin x$$

$$-c_2' \sin x + c_3' \cos x = 0$$

$$y_p'' = -c_2 \cos x - c_3 \sin x$$

Alamal

$$y_p''' = -c_2' \cos x + c_2 \sin x - c_3' \sin x - c_3 \cos x$$
$$- c_2' \cos x - c_3' \sin x = \cos x$$

$$c_1'(x) + c_2' \cos x + c_3' \sin x = 0 \quad ①$$
$$- c_2' \sin x + c_3' \cos x = 0 \quad ②$$
$$- c_2' \cos x - c_3' \sin x = \cos x \quad ③$$

ج ① , ③

$$c_1'(x) = \cos x \implies c_1(x) = \sin x$$

نضرب ② بـ $\sin x$ ، نضرب ③ بـ $\cos x$ ثم

$$c_2'(x) = -\cos^2 x = -\frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$$
$$c_2(x) = -\frac{1}{4}(\sin 2x + 2x)$$

نوجد الـ $C_3(x)$ ثم نعوض .

تتابع الحل

انتهت المحاضرة ☺