

1.10. Nonnegative Matrices, M-Matrices

Similarly, AA^H is also a Hermitian semipositive definite matrix. The square roots of the eigenvalues of $A^H A$ for a general rectangular matrix A are called the *singular values* of A and are denoted by σ_i . In Section 1.5, we stated without proof that the 2-norm of any matrix A is equal to the largest singular value σ_1 of A . This is now an obvious fact, because

$$\|A\|_2^2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \max_{x \neq 0} \frac{(Ax, Ax)}{(x, x)} = \max_{x \neq 0} \frac{(A^H Ax, x)}{(x, x)} = \sigma_1^2,$$

which results from (1.37).

Another characterization of eigenvalues, known as the Courant characterization, is stated in the next theorem. In contrast with the min-max theorem, this property is recursive in nature.

Theorem 1.22. *The eigenvalue λ_1 and the corresponding eigenvector q_1 of a Hermitian matrix are such that*

$$\lambda_1 = \frac{(Aq_1, q_1)}{(q_1, q_1)} = \max_{x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

and, for $k > 1$,

$$\lambda_k = \frac{(Aq_k, q_k)}{(q_k, q_k)} = \max_{x \neq 0, q_1^H x = \dots = q_{k-1}^H x = 0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}. \quad (1.40)$$

In other words, the maximum of the Rayleigh quotient over a subspace that is orthogonal to the first $k - 1$ eigenvectors is equal to λ_k and is achieved for the eigenvector q_k associated with λ_k . The proof follows easily from the expansion (1.33) of the Rayleigh quotient.

المعروف

المتري

1.10 Nonnegative Matrices, M-Matrices

Nonnegative matrices play a crucial role in the theory of matrices. They are important in the study of convergence of iterative methods and arise in many applications, including economics, queuing theory, and chemical engineering.

A *nonnegative matrix* is simply a matrix whose entries are nonnegative. More generally, a partial order relation can be defined on the set of matrices.

Definition 1.23. *Let A and B be two $n \times m$ matrices. Then*

$$A \leq B$$

if, by definition, $a_{ij} \leq b_{ij}$ for $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. If O denotes the $n \times m$ zero matrix, then A is *nonnegative* if $A \geq O$ and *positive* if $A > O$. Similar definitions hold in which "positive" is replaced by "negative."

The binary relation \leq imposes only a *partial order* on $\mathbb{R}^{n \times m}$, since two arbitrary matrices in $\mathbb{R}^{n \times m}$ are not necessarily comparable by this relation. For the remainder of this section we assume that only square matrices are involved. The next proposition lists a number of rather trivial properties regarding the partial order relation just defined.

Proposition 1.24. The following properties hold:

1. The relation \leq for matrices is reflexive ($A \leq A$), antisymmetric (if $A \leq B$ and $B \leq A$, then $A = B$), and transitive (if $A \leq B$ and $B \leq C$, then $A \leq C$).
2. If A and B are nonnegative, then so is their product AB and their sum $A + B$.
3. If A is nonnegative, then so is A^k .
4. If $A \leq B$, then $A^T \leq B^T$.
5. If $0 \leq A \leq B$, then $\|A\|_1 \leq \|B\|_1$ and similarly $\|A\|_\infty \leq \|B\|_\infty$.

The proof of these properties is left to Exercise 26.

A matrix is said to be *reducible* if there is a permutation matrix P such that PAP^T is block upper triangular. Otherwise, it is *irreducible*. An important result concerning nonnegative matrices is the following theorem known as the Perron–Frobenius theorem.

Theorem 1.25. Let A be a real $n \times n$ nonnegative irreducible matrix. Then $\lambda \equiv \rho(A)$, the spectral radius of A , is a simple eigenvalue of A . Moreover, there exists an eigenvector u with positive elements associated with this eigenvalue.

A relaxed version of this theorem allows the matrix to be reducible but the conclusion is somewhat weakened in the sense that the elements of the eigenvectors are only guaranteed to be nonnegative.

Next, a useful property is established.

Proposition 1.26. Let A, B, C be nonnegative matrices, with $A \leq B$. Then

$$AC \leq BC \quad \text{and} \quad CA \leq CB.$$

Proof. Consider the first inequality only, since the proof for the second is identical. The result that is claimed translates into

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} \leq \sum_{k=1}^n b_{ik}c_{kj}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

which is clearly true by the assumptions. □

A consequence of the proposition is the following corollary.

Corollary 1.27. Let A and B be two nonnegative matrices, with $A \leq B$. Then

$$A^k \leq B^k \quad \forall k \geq 0. \quad (1.41)$$

Proof. The proof is by induction. The inequality is clearly true for $k = 0$. Assume that (1.41) is true for k . According to the previous proposition, multiplying (1.41) from the left by A results in

$$A^{k+1} \leq AB^k. \quad (1.42)$$

1.10. Nonnegative Matrices, M-Matrices

Now, it is clear that if $B \geq 0$, then also $B^k \geq 0$, by Proposition 1.24. We now multiply both sides of the inequality $A \leq B$ by B^k to the right and obtain

$$AB^k \leq B^{k+1}. \quad (1.43)$$

The inequalities (1.42) and (1.43) show that $A^{k+1} \leq B^{k+1}$, which completes the induction proof. \square

A theorem with important consequences on the analysis of iterative methods will now be stated.

Theorem 1.28. Let A and B be two square matrices that satisfy the inequalities

$$0 \leq A \leq B. \quad (1.44)$$

Then

$$\rho(A) \leq \rho(B). \quad (1.45)$$

Proof. The proof is based on the following equality stated in Theorem 1.12:

$$\rho(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|X^k\|^{1/k}$$

for any matrix norm. Choosing the 1-norm, for example, we have, from the last property in Proposition 1.24,

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|_1^{1/k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k\|_1^{1/k} = \rho(B),$$

which completes the proof. \square

Theorem 1.29. Let B be a nonnegative matrix. Then $\rho(B) < 1$ iff $I - B$ is nonsingular and $(I - B)^{-1}$ is nonnegative.

Proof. Define $C = I - B$. If it is assumed that $\rho(B) < 1$, then, by Theorem 1.11, $C = I - B$ is nonsingular and

$$C^{-1} = (I - B)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} B^i. \quad (1.46)$$

In addition, since $B \geq 0$, all the powers of B as well as their sum in (1.46) are also nonnegative.

To prove the sufficient condition, assume that C is nonsingular and that its inverse is nonnegative. By the Perron-Frobenius theorem, there is a nonnegative eigenvector u associated with $\rho(B)$, which is an eigenvalue; i.e.,

$$Bu = \rho(B)u$$

or, equivalently,

$$C^{-1}u = \frac{1}{1 - \rho(B)}u.$$

Since u and C^{-1} are nonnegative and $I - B$ is nonsingular, this shows that $1 - \rho(B) > 0$ which is the desired result. \square

المادة الثانية عشر

الصفحة 25

1.10 : المصفوفات الكبر سالة

تعتبر المصفوفات العيسالية دوراً أساسياً في دراسة المصفوفات الأربعة في دراسة بقاها في الطريقة الهندسية وتطبيقات العديد من التقنيات التي تتجهن الاقتصاد، الطريقة الارتكاز والهندسة الكهيات.

المصفوفة العيسالية هي عبارة مصفوفة من عناصرها. الكلام على علاقة الترتيب الجزئية مما ذكره في المصفوفات.

تعريف 1.23 : لكن A, B مصفوفتين من المرتبة $n \times m$ إذا

$$A \leq B$$

إذا بالتعريف، لأنه $a_{ij} \leq b_{ij}$ لكل $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$

إذا كانت O (المصفوفة الصفرية) من المرتبة $n \times m$ عن صالة A عن صالة إذا

$$A > O \text{ و مصفوفة إذا عنصه } A > O$$

تأريف كسبية السابقة أسأل «مصفوفة» «سالة»

إن العلاقة الشاسية في تقترن وجود ترتيب جزئي في $R^{n \times m}$ عن صالة ليس بالضرورة. أي أن كونه المصفوفات متساوية فالسبة لعلاقة الترتيب جزئي. أي بقا هذا الفصل سيقر من أن المصفوفات مرتبة.

الحاجة التالية تتضم العديد من كذاها عن البديهة عنصه عن صالة الترتيب الجزئي المبرهنة للتو

"الصفحة 26"

صالح: الصفحة 1.24 : الخاضع التالية كفة

① علاقة الترتيب \leq المصفوفات الكاسية. $(A \leq A)$

خاصية (إذا $A \leq B$ و $B \leq A$ عن صالة $A = B$)

معتدفة إذا $A \leq B$ و $B \leq C$ عن صالة $A \leq C$.

② إذا كان A, B عن صالتين عن صالين كل عنصراد AB و الكونج $A+B$ تكونان كذلك.

③ إذا كانت A عن صالة عن صالين A^k تكون كذلك.

④ إذا كانت $A \leq B$ عندها $A^T \leq B^T$

⑤ إذا كانت $A \leq B$ عندها $\|A\|_1 \leq \|B\|_1$ و $\|A\|_\infty \leq \|B\|_\infty$

إن برهان هذه الخواص نذكره.

فقال عن صفوة A ، فإن قابلية للافتزال إذا وجد صفوة P انتقال P كصفة PAP^T

هي صفوة متشابهة عليها. في الحالة

نفاية خاصة تتعلق بالصدمات العبر سالبة في النظرية التالية المعروفة باسم

ليرون - فريدبريس

نظرية 1.25 : لكن A صفوة من الرتبة $n \times m$ في قابلية للافتزال

عندها : $\rho(A) = \rho(A^T)$ ، إن صفوة A هي صفوة A^T من صفوة ذاتية

سوية الصفوة A ، وأكثر من ذلك، ليهم سماع ذاتي u و v صفوة

فحاشاً مرتبطة بهذه الصفوة الذاتية،

أما حفظ هذه النظرية لجميع الصفوة أن تكون سالبة للافتزال، يمكن لصفة

تكون صفوة صفوة A بالسر، وذلك أن لا يمتد إلى صفوة متشابهة مع

عناصر غير سالبة.

التالي، خاصة خاصة أساساً:

خاصة 1.26 :

لكل A, B, C صفوة عبر سالبة ولكن $A \leq B$ عندها $CA \leq CB$

$$CA \leq CB \text{ و } A \leq B$$

البرهان شرطه.

نتيجة 1.27 : لكن A, B صفوة من جالستانه إذا كانت $A \leq B$ عندها

$$A^k \leq B^k \quad \forall k \geq 0$$

البرهان كذا.

"الصفة 27"

نظرية 1.28 : لكن A و B صفوة من جالستانه كصفة المتداخلة.

$$0 \leq A \leq B$$

عندها

$$\rho(A) \leq \rho(B)$$

البرهان كذا.

نقطة 1,29 : كذا B مصونة في رسالة فيها (AB) إذا
وفقا إذا كانت (I-B) غير صالحة وأما (I-B) في رسالة.
البرهان في ذلك.

« البرهان المخافة الثانية عشر »