المحاضرة الخامسة عشر :

• مبرهنة : ليكن : $n \geq 1$ عدد صحيح عندئذ : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$

الإثبات :

• لدينا : $n\mathbb{Z}$ زمرة جزئية ناظمية في $\mathbb{Z}$, ولنعرف العلاقة :

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$$

$$\forall m \in \mathbb{Z} : g(m) = \overbrace{m(\text{mod-}n)}^{\text{باقي قسمة } m \text{ على } n}$$

• إنّ g تطبيق : كون تساوي المضروبين يؤدي إلى تساوي باقي قسمتيهما على نفس العدد .

• إنّ g تشاكل زمري لأنّ :

$$\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z} : g(m_1+m_2) = (m_1+m_2)(\text{mod-}n)$$
$$= m_1(\text{mod-}n) + m_2(\text{mod-}n)$$
$$= g(m_1) + g(m_2)$$

• إنّ g غامر لأنّ :

ليكن $a \in \mathbb{Z}_n$ عندئذ $a \in \mathbb{Z}$: $\overbrace{a \in \mathbb{Z}_n \Leftarrow n > a}$

$$g(a) = a(\text{mod-}n) = a$$

• وحسب مبرهنة التماثل الأولى يكون :

$$\{ \mathbb{Z}/\boxed{Ker(g)} \cong \mathbb{Z}_n \}$$

• الآن لنبرهن أنّ : $\boxed{n\mathbb{Z} = Ker(g)}$

• ليكن : $x \in Ker(g)$: عندئذ : $g(x) = 0$

$$x(\text{mod-}n) = 0$$

ومنه يكون $x \in n\mathbb{Z}$

ومنه : $\Rightarrow \boxed{Ker(g) \subseteq n\mathbb{Z}}$

• ليكن : $y \in n\mathbb{Z}$ عندئذ : $y \in \mathbb{Z}$

$$g(y) = \overbrace{y(\text{mod-}n) = 0}^{\text{لأنها مضاعف لـ } n} \Rightarrow y \in Ker(g)$$

$$\Rightarrow \boxed{n\mathbb{Z} \subseteq Ker(g)}$$

ومن المبرهنتين نجد أن : $\boxed{n\mathbb{Z} = \ker(g)}$

ومنه :

$$\left\{ \mathbb{Z}/\boxed{n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_n \right\}$$

نتيجة : ((كل عنصر من $\mathbb{Z}_n$ هو صف تكافؤ بسبب وجود التماثل))

• مبرهنة :

1). كل زمرة دوارة وغير منتهية تماثل $\mathbb{Z}$

2). جميع الزمر الدوارة وغير المنتهية تماثل $\mathbb{Z}$.

3). كل زمرة دوارة منتهية مرتبتها n تماثل $\mathbb{Z}_n$.

4). جميع الزمر الدوارة المنتهية والتي مرتبة كل منها n (أي لها نفس المرتبة) تكون متماثلة

الإثبات :

1)• لتكن G زمرة دوارة وغير منتهية عندئذ : $G = \langle a \rangle$ حيث $a \in G$

ولنعرف العلاقة : $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$

$$\forall n \in \mathbb{Z} : f(n) = a^n$$

• إن f تطبيق لأن :

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} \; ; n = m \Rightarrow a^n = a^m \Rightarrow f(n) = f(m)$$

• إن f تشاكل زمري لأن :

$$f(n+m) = a^{n+m} = a^n . a^m = f(n) . f(m)$$

• إن f متباين لأن :

ليكن : $n, m \in \mathbb{Z}$ بحيث : $f(n) = f(m)$ أي : $a^n = a^m$

ومنه يكون : $n = m$ وذلك لأن الزمرة $G = \langle a \rangle$ غير منتهية

• إن f غامر لأن :

ليكن : $z \in \langle a \rangle$ عندئذ يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث : $z = a^k$

$$f(k) = a^k = z$$

ومما سبق يكون f تماثل،

أي أن : $\left\{ G \simeq \mathbb{Z} \right\}$

2) ينتج من (1) مباشرة.

3) لتكن G زمرة دوارة منتهية مرتبتها n ، وأنّ: $G=\langle a\rangle$

ولنعرف العلاقة: $f:\mathbb{Z}_n \longrightarrow G$

$\forall m\in\mathbb{Z}_n : f(m)=a^m$

إن f تطبيق ويحقق أنه تشاكل زمري ، الاختلاف عن إثبات (1) في إثبات أنه متباين:

ليكن: $m_1,m_2\in\mathbb{Z}_n$ بحيث: $f(m_1)=f(m_2)$

$\underbrace{a^{m_1}=a^{m_2} \Longrightarrow m_1=m_2}_{\text{لأن عناصر } G \text{ مختلفة مثنى مثنى.}}$

وبالتالي f متباين وواضح أنه غامر ولنتج المطلوب أي:

$\mathbb{Z}_n \cong G$

4) ينتج من (3) مباشرة.

تمرين: ادرس وجود أو عدم وجود تماثل بين الزمر التالية:

$U(5)$, $\mathbb{Z}_4$, $U(10)$

الحل:

• نلاحظ أنّ: $U(5)=\{1,2,3,4\}$

$\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$

$U(10)=\{1,3,7,9\}$

• نلاحظ أنّ: $\mathbb{Z}_4=\langle 1\rangle , U(5)=\langle 2\rangle , U(10)=\langle 3\rangle$

$(U(5):1)=(\mathbb{Z}(4):1)=(U(10):1)=4$

• ومنه: $\mathbb{Z}_4\cong U(5)\cong U(10)$ ، وذلك حسب المبرهنة السابقة «كل زمرة دوارة ومنتهية ومرتبتها n تماثل $\mathbb{Z}_n$».

تمرين: ادرس وجود أو عدم وجود تماثل بين الزمر التالية:

$U(12)$, $U(10)$

الحل:

$U(12)=\{1,5,7,11\}$, $U(10)=\{1,3,7,9\}$

$(U(10):1)=(U(12):1)=4$

.لكن: $U(12)$ ليست دوارة ومنه لا يمكن الحكم بوجود تماثل بين الزمرتين: $U(12), U(10)$

.من أجل ذلك نفرض جدلاً أنّ: $U(12) \cong U(10)$ أي يوجد $g: U(10) \to U(12)$ تماثل زمري.

من خلال دراستنا للزمرة نلاحظ أنّ:

$1^2=1$, $5^2=1$, $7^2=1$, $11^2=1$

$\Rightarrow \forall x \in U(12) : x^2=1$

$$g(9)=g(3.3)=g(3).g(3)$$
$$=(g(3))^2$$
$$=1$$
$$=g(1)$$

وهذا يعني أن $9=1$ وهذا غير ممكن ومنه ليس تماثل.

زمرة التماثلات:

.نرمز لمجموعة التشاكلات (HomomorPhism) بالشكل: $Hom(G, G')$ أي يمكننا أن نقول عن التشاكل:

$f \in Hom(G, G')$ $\quad f: G \to G'$

المنطلق المستقر

.في حال تساوي المنطلق والمستقر تسمى مجموعة التشاكلات بـ: (EndomorPhism):

$$Hom(G,G)=End(G)$$

.**تعريف:**

لتكن G زمرة، لنرمز لزمرة جميع التماثلات من G إلى G بالشكل: $Aut(G)$ وهي غير خالية لأن المطابقة موجود وتسمى بـ: (AutomorPhism).

$$f: G \longrightarrow G'$$

$Hom(G, G') \neq \phi$ بسبب وجود التطبيق الذي يربط كل عنصر من G بحايد من G'.

وظيفة: أثبت أن المجموعة $Aut(G)$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات.

. مبرهنة: لتكن G زمرة ولتكن $a \in G$ عندئذٍ العلاقة:
$Ta : G \longrightarrow G$ المعرفة بالشكل: $\forall x \in G : Ta(x) = a.x.a^{-1}$
هي تماثل للزمرة G يسمى التماثل الداخلي (الذاتي) للزمرة G.

الإثبات:

• ليكن $x, y \in G$ عندئذٍ:

• إنّ: Ta تطبيق لأنه: إذا كان $x = y$ فإنه يكون:

$$a.x.a^{-1} = a.y.a^{-1}$$
$$Ta(x) = Ta(y)$$

• إنّ: Ta تشاكل لأنّ:

$$Ta(x.y) = a.(x.y).a^{-1} = a.(x.e.y).a^{-1}$$
$$= a.(x.a^{-1}.a.y).a^{-1}$$
$$= (a.x.a^{-1}).(a.y.a^{-1})$$
$$= Ta(x) . Ta(y)$$

• إنّ: Ta متباين لأنّ إذا كان:

$$Ta(x) = Ta(y)$$

فإنّ:

$$a.x.a^{-1} = a.y.a^{-1}$$
$$\Rightarrow x = y$$

• إنّ Ta غامر لأنّ:

ليكن $z \in G$ ، $a^{-1}.z.a \in G$

$$Ta(a^{-1}.z.a) = a.a^{-1}.z.a^{-1}.a = z$$

ومما سبق يكون: Ta تماثل في G.

تمهيدية: لتكن G زمرة، ولتكن $a \in G$ عندئذٍ: $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$

الإثبات:

. $a^{-1} \in G$ فيكون: $T_{a^{-1}}$ تماثل حسب المبرهنة السابقة.

. $T_a^{-1} = (T_a)^{-1}$ ، كل من: T_a^{-1} ، $T_{a^{-1}}$ موجود في $Aut(G)$

ولإثبات تساويهما يجب إثبات أنهما يتساويان عند كل عنصر من عناصر المنطلق.

$T_a, T_a^{-1} \in Aut(G)$: $T_a . T_a^{-1} = T_e$

$$T_a . T_a^{-1}(x) = T_e(x) \quad , \forall x \in G$$

$$T_a . (T_a^{-1}(x)) = T_e(x) = x \quad , \forall x \in G$$

$$a . T_a^{-1}(x) . a^{-1} = x \quad , \forall x \in G$$

$$\Rightarrow T_a^{-1}(x) = a^{-1} . x . a = a^{-1} . x . (a^{-1})^{-1}$$

$$= T_{a^{-1}}(x) , \forall x \in G$$

$$\Rightarrow T_{a^{-1}} = T_a^{-1}$$

تعريف: لتكن G زمرة ولتكن: $a \in G$ نسمي التماثل T_a تماثلاً داخلياً للزمرة G ، نرمز لمجموعة التماثلات الداخلية للزمرة G بالشكل: $Inn(G)$ وهي جزئية في: $Aut(G)$

مبرهنة: لتكن G زمرة عندئذٍ:

1) مجموعة التماثلات الداخلية $Inn(G)$ هي زمرة جزئية ناظمية في: $Aut(G)$

2) $\dfrac{G}{Z(G)} \cong Inn(G)$

الإثبات:

1) وجدنا سابقاً أنّ: $Inn(G) \neq \phi$ ~~Aut(G)...~~

و: $Inn(G) \subseteq Aut(G)$

ولنبرهن أنها زمرة جزئية.

. ليكن: $T_a, T_b \in Inn(G)$ حيث: $a, b \in G$ وليكن: $x \in G$

. عندئذٍ:

$$T_a . T_b^{-1}(x) = T_a(T_b^{-1}(x))$$
$$= T_a(T_{b^{-1}}(x))$$
$$= T_a.(b^{-1}.x.b)$$
$$= (a.b^{-1}).x.(b.a^{-1})$$
$$= T_{ab^{-1}}(x)$$

تماثل: $a.b^{-1} \in G \Rightarrow T_{ab^{-1}}$

$$T_a . T_b^{-1} = T_{a.b^{-1}} \in Inn(G)$$

. ومنه: $Inn(G)$ زمرة جزئية في: $Aut(G)$

. ليكن: $f \in Aut(G)$ ولنثبت أنّ:

$$\{f.Inn(G).f^{-1} \subseteq Inn(G)\}$$

. ليكن: $g \in f.Inn(G).f^{-1}$ عندئذٍ يوجد $T_a \in Inn(G)$ بحيث $a \in G$ تحقق:

$$g = f.T_a.f^{-1}$$

ليكن $x \in G$ عندئذٍ:

$$g(x) = f.T_a.f^{-1}(x)$$
$$= f(T_a(f^{-1}(x)))$$
$$= f(a.f^{-1}(x).a^{-1})$$
$$= f(a).f(f^{-1}(x)).f(a^{-1})$$
$$= f(a).T_e(x).f[(a)]^{-1}$$
$$= f(a)\,x.f[(a)]^{-1}$$
$$= T_{f(a)}(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = T_{f(a)}(x) \quad , \forall x \in G$$
$$\Rightarrow g = T_{f(a)} \in Inn(G)$$

وبالتالي: $\{f.Inn(G).f^{-1} \subseteq Inn(G)\}$

وهذا يبين أن الزمرة الجزئية $Inn(G)$ ناظمية في $Aut(G)$

2) لنعرف العلاقة: $\psi : G \longrightarrow Inn(G)$

$\forall a \in G : \psi(a) = T_a$

ليكن $a, b \in G$ بحيث $a = b$ ومنه:

$a.x.a^{-1} = b.x.b^{-1}$ «$\forall x \in G$»

$T_a(x) = T_b(x)$ «$\forall x \in G$»

$T_a = T_b$

$\psi(a) = \psi(b) \Rightarrow$ تطبيق ψ

إن: $\psi(ab) = T_{ab}$، ولنبرهن أن: ψ تشاكل

«$\forall x \in G$» $T_{ab}(x) = (a.b).x.(a.b)^{-1}$

$$= a.b.x.b^{-1}.a^{-1}$$

$$= a(b.x.b^{-1}).a^{-1}$$

$$\Rightarrow T_{ab}(x) = T_a(b.x.b^{-1}) = T_a.T_b(x)$$

$$\Rightarrow \psi(ab) = T_{ab} = T_a.T_b$$

$$= \psi(a).\psi(b)$$

ومنه ψ تشاكل

وهو أيضاً غامر لأنه: إذا كان $T_d \in Inn(G)$ بحيث $d \in G$ فإن:

$\psi(d) = T_d$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى يكون:

$$\frac{G}{\boxed{Ker\psi}} \cong Inn(G)$$

لنبرهن الآن على أن: $\boxed{Ker\psi = Z(G)}$

ليكن: $a \in Ker\psi$ عندئذٍ:

$$\left.\begin{array}{l}\psi(a) = T_a \\ \psi(a) = T_e\end{array}\right\} \Rightarrow T_a = T_e$$

ومنه: $T_a(x) = T_e(x), \forall x \in G$

$\Rightarrow a \cdot x \cdot a^{-1} = e \cdot x \cdot e^{-1} = x$

$\Rightarrow a x = x \cdot a$

$\Rightarrow a \in Z(G) \Rightarrow \{\ker \psi \subseteq Z(G)\}$

ليكن $b \in Z(G)$ أي: $\forall x \in G : b x = x \cdot b$

$b \cdot x \cdot b^{-1} = x$

$\Rightarrow T_b(x) = x = T_e(x)$

$\Rightarrow T_b = T_e$

$\Rightarrow \psi(b) = T_b = T_e$

$\Rightarrow b \in \ker \psi$

$\Rightarrow \{Z(G) \subseteq \ker \psi\}$

ومن الاحتوائين: $\boxed{Z(G) = \ker \psi}$

$\Rightarrow \{G/Z(G) \cong Inn(G)\}$

انتهت المحاضرة.