الثلاثاء: 9/12/2014

المحاضرة الثامنة عشرة:

- ثلاثية و معادلات فرينيه -

ليكن $\mathcal{L}$ منحنياً من الصف C_k حيث $(2 \leq k)$ عندئذٍ في كل نقطة نظامية وغير مقوّمة نستطيع تعريف ثلاثة متجهات واحدة
لكن p_0 نقطة نظامية وغير مقوّمة من $\mathcal{L}$ موافقة للوسيط الطبيعي s.

المتجه الأول:

متجه واحدة المماس: ويعرّف بالمساواة

$$\vec{t}(s_0) = \vec{r}'(s_0)$$

حيث النقطة p_0 نظامية،
المتجه $\vec{r}'(s)$ متجه واحدة يسمى متجه واحدة المماس
أما إذا أردنا أن نعرف هذا المتجه في تمثيل ما ليس بالضرورة تمثيل طبيعي، فإن متجه واحدة المماس سيعرف بالمساواة:

$$\vec{t}(t_0) = \frac{\vec{r}'(t_0)}{\|\vec{r}'(t_0)\|}$$

المتجه الثاني:

متجه واحدة الناظم الأساسي:
وهو متجه واحدة للمستقيم الناظم على المماس $\vec{t}$ الواقع في المستوي الملاصق والذي له جهة $\vec{o} + \vec{r}''(s_0)$ (لأن النقطة غير مقوّمة) والتي هي جهة تقعر المنحني - بشكل أدق - جهة تقعر مسقط المنحني على المستوي الملاصق عند p_0
نرمز لهذا المتجه بالرمز $\vec{n}$ حيث:
إن $\vec{r}''(s_0)$ عمودي على المماس في النقطة p_0 (المماس يوازي $\vec{r}'(s_0)$ والمتجهان $\vec{r}'(s_0)$ و $\vec{r}''(s_0)$ متعامدان)
و $\vec{r}''(s_0)$ واقع في المستوي الملاصق الذي نعين بـ $\vec{r}'(s_0)$ و $\vec{r}''(s_0)$

وبالتالي المتجه $\vec{n}$ سيكون ناتج عن ناظم المتجه $\vec{r}(s)$ حيث:

$$\vec{n}(s) = \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|}$$

وهو متجه واحدة لأنه عند تقسيم أي متجه على طوله فإنه يصبح متجه واحدة موازي لذلك المتجه.

المتجه الثالث:

هو متجه واحدة ثنائي الناظم:

هو متجه واحدة المستقيم الناظم على المستوي الملاصق وهو متجه وحيد، ويمكن إيجاده بالاعتماد على $\vec{t}, \vec{n}$

وبالتالي: هو متجه ناظم على المستوي الملاصق فهو ناظم على $\vec{r}(s)$

حيث $\vec{t}$ متجه واحدة المماس وموجود في المستوي الملاصق وموازي لـ $\vec{r}(s)$

و $\vec{n}$ متجه واحدة الناظم الأساسي وموجود في المستوي الملاصق وموازي لـ $\vec{r}''(s)$

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$$

والذي متجه حيث تكون الثلاثية $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ موجبة التوجيه (لها توجيه الفضاء $\mathbb{R}^3$)

بما أن $\vec{b}$ هو متجه واحدة لأن:

$$\|\vec{b}\| = \|\vec{t} \wedge \vec{n}\| = \|\vec{t}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

المتجه $\vec{b}$ بشكل آخر

إن $\vec{r}(s)$ و $\vec{t}$ متوازيان ولهما نفس الجهة، والمتجهان $\vec{r}''(s)$ و $\vec{n}$ متوازيان ولهما نفس الجهة وبما أن المتجهين $\vec{r}'(s)$ و $\vec{r}''(s)$ يمثلان المستوي الملاصق

بما أن $\vec{r}'(s) \wedge \vec{r}''(s)$ عمودي على المستوي الملاصق فهو سيكون متجه موازي لـ $\vec{b}$

وبالتالي نحصل على متجه الواحدة $\vec{b}$ كما يلي:

$$\vec{b}(s) = \frac{\vec{r}'(s) \wedge \vec{r}''(s)}{\|\vec{r}'(s) \wedge \vec{r}''(s)\|}$$

أو:

$$\vec{b}(s) = \frac{\vec{r}'(s) \wedge \vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|}$$

ودلك لأن: $\|\vec{r}'(s) \wedge \vec{r}''(s)\| = \|\vec{r}'(s)\| \cdot \|\vec{r}''(s)\| \sin(\frac{\pi}{2})$

$= \|\vec{r}'(s)\| \cdot \|\vec{r}''(s)\|$ (1)

لأن $\vec{r}'(s)$ متجه وحدة

$\Rightarrow \|\vec{r}'(s) \wedge \vec{r}''(s)\| = \|\vec{r}''(s)\|$

ملاحظة:

قد يكون من الأسهل حساب $\vec{b}$ ثم $\vec{n}$ لذلك سنعرف $\vec{n}$:

(علماً أن التبديل الدوري لا يؤثر على إيجاد الجداء الخارجي)

$\Rightarrow \vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$

تسمى المتجهات $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ متجهات فرينيه أو ثلاثية فرينيه.

تطبيق: إذا كانت ثلاثية فرينيه في تمثيل بالبعد الضروري لمنحنى عند نقطة ثابتة وغير معدومة:

لدينا من المحاضرة السابقة

$\vec{r}' \wedge \vec{r}'' = (s')^3 (\vec{r}' \wedge \vec{r}'')$ (1)

$\vec{r}' \wedge \vec{r}'' = (t')^3 (\vec{r}' \wedge \vec{r}'')$ (2)

لنكتب $\vec{b}$ بدلالة $\vec{r}'$, $\vec{r}''$:

$$\vec{b} = \frac{\vec{r}' \wedge \vec{r}''}{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|} = \frac{(t')^3 (\vec{r}' \wedge \vec{r}'')}{\|(t')^3 (\vec{r}' \wedge \vec{r}'')\|}$$

بما أن $s(t), t(s)$ دالتان متعاكستان

ودلك في النقط المناسبة. $t'(s_0) = \frac{1}{s'(t_0)} = \frac{1}{\|\vec{r}'(t_0)\|} > 0$

$$\Rightarrow \vec{b} = \frac{(t')^3 (\vec{r}' \wedge \vec{r}'')}{(t')^3 \|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|} = \frac{\vec{r}' \wedge \vec{r}''}{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|}$$

(يجب الانتباه هنا إلى أن $\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\| \neq \|\vec{r}''\|$ لأن $\|\vec{r}''\|$ ليست بالضرورة متجه واحدة.

بالنسبة لإيجاد $\vec{n}$ نأخذ:

$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$ (تم إعطاؤه في البداية)

ونعوض (ملاحظة لحفظ القانون)

حيث القانون موجود بالكتاب

ملاحظة:
في كل نقطة نظامية وغير مفردة من منحنى L مستقيمان و
ثلاثة مستويات وهي:

المستقيمات:

1. المستقيم المماس للمنحنى عند النقطة P_0 الموافقة لـ t_0
معادلته الوسيطية (تمثيله الوسيطي) هي:

$$(\vec{R}(\lambda) - \vec{r}(t_0)) = \lambda \vec{r}'(t_0)$$

أما المعادلة الديكارتية نحصل عليها من:

$$(\vec{R} - \vec{r}(t_0)) \wedge \vec{r}'(t_0) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \end{vmatrix} = \vec{0}$$

حيث $Q(X, Y, Z)$ هي نقطة اختيارية من المستقيم المماس.

وبما أن المتجهتان $(\vec{R} - \vec{r}(t_0))$ و $\vec{r}'(t_0)$ متوازيتان فإن إحداثياتهما متناسبة ومنه:

$$\frac{X - x_0}{x'(t_0)} = \frac{Y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{Z - z_0}{z'(t_0)}$$

وهي المعادلات الديكارتية للمستقيم المماس عند النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ الموافقة لـ t_0

2. المستقيم الناظم الأساسي على المنحنى عند النقطة P_0:
معادلته تكتب بالشكل:

$$\vec{R}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{n}(t_0)$$

or:

$$\vec{R}(\alpha) = \vec{r}(s_0) + \alpha \underbrace{\vec{r}''(s_0)}_{\parallel \vec{n}}$$

لأن $(\vec{r}'' \parallel \vec{n})$

3) المستقيم ثنائي الناظم على المنحني عند النقطة P_0:

ومعادلته هي

$$\vec{R}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{b}(t_0)$$

ملاحظة: عندما تكون النقطة نظامية وستوثة أي $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$ فإنه نستطيع تعيين الناظم ولكن أستطيع منه تعيين متجه واحدة المماس

المستويات:

1) المستوي الملاصق $\mathcal{L}$ عند P_0:

معادلته الوسيطية:

$$\vec{R} = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{t}(t_0) + \mu \vec{n}(t_0)$$

بما أن المتجهات: $\vec{R} - \vec{r}(t_0)$ ، $\vec{t}(t_0)$ ، $\vec{n}(t_0)$ واقعة في المستوي الملاصق فإن

$$[\vec{R} - \vec{r}, \vec{t}, \vec{n}] = 0$$

المعادلة الديكارتية:

بما أن المستوي الملاصق عمودي على $\vec{b}$ فإنه لمعادلة المستوي يمكنه أن تكتب بالشكل:

$$(\vec{R} - \vec{r}) \cdot \vec{b} = 0$$

$$(X - x_0)\alpha + (Y - y_0)\beta + (Z - z_0)\gamma = 0$$

حيث $\vec{b} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

2) المستوي الناظم $\mathcal{L}$ عند P_0:

بما أن المستوي الناظم يحوي الناظمين فهو عمودي على $\vec{t}$

$$\Rightarrow (\vec{R} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{t}(t_0) = 0$$

يمكنه أن نحصل على المعادلة الديكارتية من الشكل:

$$[\vec{R} - \vec{r}(t_0), \vec{n}(t_0), \vec{b}(t_0)] = 0$$

أو المعادلة الوسيطية من الشكل:

$$\vec{R} = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{n}(t_0) + \mu \vec{b}(t_0)$$

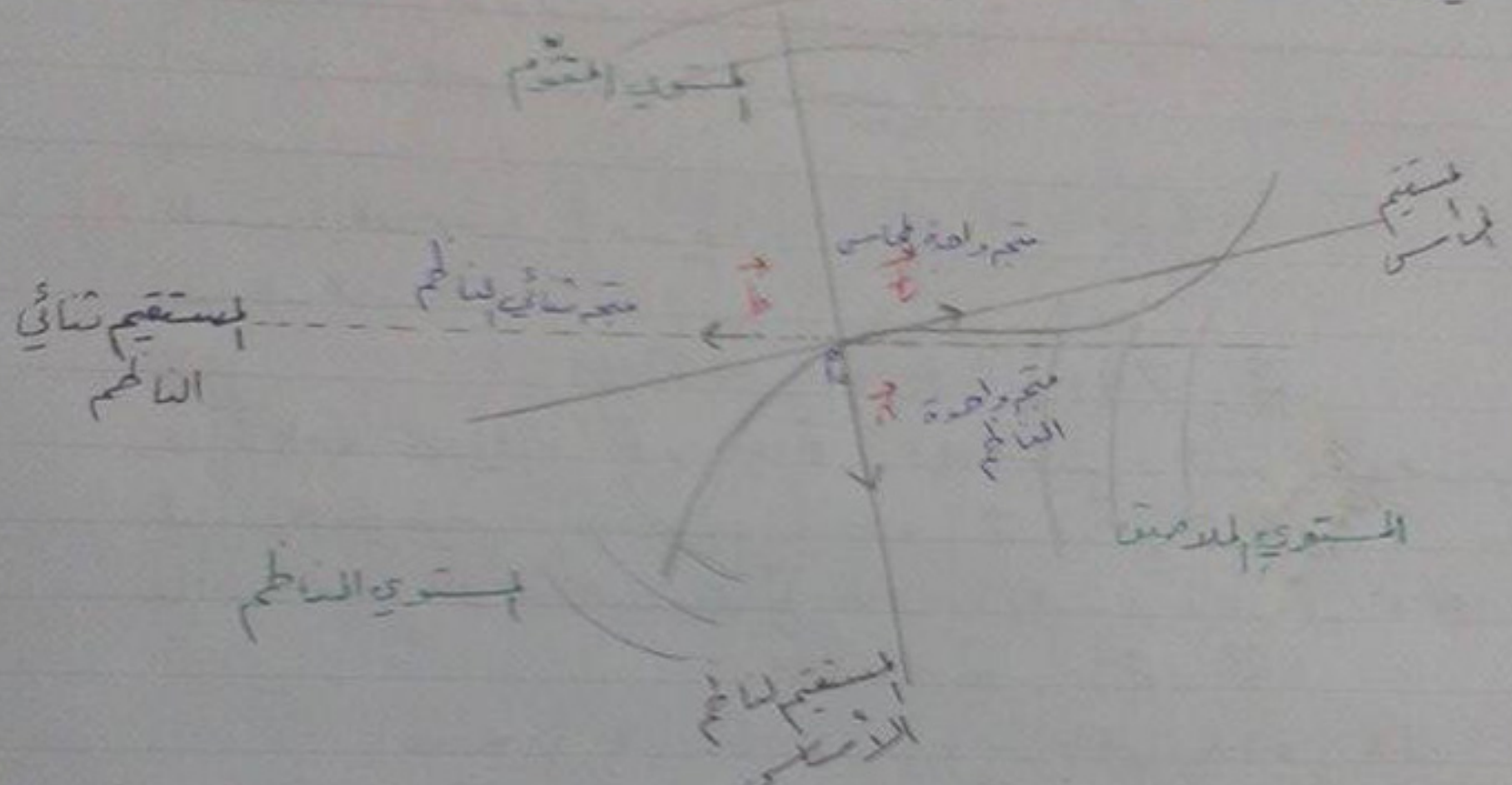
3) المستوي المقوّم $\mathcal{L}$ عند P_0:

هذا المستوي يحوي $\vec{t}$ ومتجه واحدة ثنائي الناظم هو عمودي على متجه واحدة الناظم $\vec{n}$

معادلة $\Longrightarrow$ $(\vec{R} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{n}(t_0) = 0$

ويمكننا استنتاج المعادلات الأخرى بنفس الطريقة.

- نسمي هذه المستويات الثلاث بأسمائها (وجوهه) فرينيه.



عند ما تتحرك النقطة على المنحني فإن متجهات فرينيه تدور مع المستويات أيضاً تدور وبالتالي يمكننا اعتبار جملة المحاور الإحداثية متحركة مع المنحني ونسمي هذه الجملة بـ جملة محلية.

مبرهنة:

ليكن $\mathcal{L}$ منحنياً و $\vec{r}(s)$ $\leftarrow s$ تمثيلاً طبيعياً له من الصنف C_3 عندئذٍ:

إن الشعاعات لمتجهات فرينيه عند نقطة نظامية وغير متقومة تحقق العلاقات التالية:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{t} + \tau\vec{b} \quad (2)$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau\vec{n} \quad (3)$$

هذه العلاقات تدعى علاقات فرينيه (دساتير فرينيه)

الإثبات:

$$\vec{t} = \vec{r}' \Rightarrow \frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{r}'' = \|\vec{r}''\| \cdot \vec{n}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}''}{\|\vec{r}''\|} \quad ;$$

سنأخذ: $k = \|\vec{r}''\|$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n} \quad (1)$$

بذلك تكون العلاقة الأولى صحيحة

إن ثلاثية فرينيه $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ هي متجهات مستقلة خطياً وعددها عناصرها 3 وبالتالي تعد القضاء $\mathbb{R}^3$ على قاعدة للفضاء $\mathbb{R}^3$

وبما أن: $\frac{d\vec{b}}{ds}$ ، $\frac{d\vec{n}}{ds}$ هي متجهات في الفضاء $\mathbb{R}^3$ فهي تركيب خطي

بدلالة عناصر القاعدة ; متجهات القاعدة $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{n}}{ds} = a\vec{t} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{b} \quad (*)$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \lambda\vec{t} + \mu\vec{n} + \nu\vec{b} \quad (*)'$$

إذا اضربنا داخلياً كلاً من إشارتي الساقتين بـ $\vec{t}$ ، $\vec{n}$ ، $\vec{b}$ نحصل على ستة علاقات

~~وبما أن الثلاثية $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ هي ثلاثية متجهات واحدية فهي تحقق:~~

~~$\vec{t} \cdot \vec{t} \cdot \|\vec{t}\|^2 = 1$~~

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة للوسيط الطبيعي s

$$\Rightarrow 2\vec{t}\,\frac{d\vec{t}}{ds} = 0 \rightarrow \vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$$

وهي:

$\vec{t}$ أداة ضرب (*) بـ

$$\vec{t}\,\frac{d\vec{n}}{ds} = a\,\vec{t}\cdot\vec{t} + \beta\,\vec{t}\cdot\vec{n} + \gamma\,\vec{t}\cdot\vec{b}$$

(1) (0) (0)

$$\Rightarrow \alpha = \vec{t}\,\frac{d\vec{t}}{ds} \quad (1)$$

ونأخذ بنفس الطريقة:

$$(2)\ \beta = \vec{n}\,\frac{d\vec{n}}{ds}\ ,\quad (3)\ \gamma = \vec{b}\,\frac{d\vec{n}}{ds}$$

$$(4)\ \lambda = \vec{t}\,\frac{d\vec{b}}{ds}\ ,\quad (5)\ \mu = \vec{n}\,\frac{d\vec{b}}{ds}\ ,\quad (6)\ \vec{u} = \vec{b}\,\frac{d\vec{b}}{ds}$$

ولدينا الثلاثية $(\vec{b}, \vec{n}, \vec{t})$ هي ثلاثية متجهات واحدة مختلفة الاتجاهات.

$$\vec{t}\cdot\vec{t} = \|\vec{t}\|^2 = 1\ ,\quad \vec{n}\cdot\vec{n} = 1\ ,\quad \vec{b}\cdot\vec{b} = 1$$

نشتق طرفي كل من العلاقات السابقة بالنسبة للوسيط s فنحصل على:

$$(1)\ \vec{b}\,\frac{d\vec{b}}{ds} = 0\ ,\quad (2)\ \vec{n}\cdot\frac{d\vec{n}}{ds} = 0\ ,\quad 2\,\vec{t}\,\frac{d\vec{t}}{ds} = 0 \Rightarrow (1)\ \vec{t}\,\frac{d\vec{t}}{ds} = 0$$

ولدينا الثلاثية $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ متجهات متعامدة مثنى مثنى فهي تحقق:

$$(1)'\ \vec{t}\cdot\vec{n} = 0\ ,\quad (2)'\ \vec{t}\cdot\vec{b} = 0\ ,\quad (3)'\ \vec{n}\cdot\vec{b} = 0$$

نشتق طرفي كل من العلاقات السابقة على الترتيب بالنسبة للوسيط s فنحصل على:

$$(1)' \text{ باشتقاق} \Rightarrow \frac{d\vec{t}}{ds}\cdot\vec{n} + \vec{t}\,\frac{d\vec{n}}{ds} = 0 \Rightarrow \vec{t}\,\frac{d\vec{n}}{ds} = -\vec{n}\,\frac{d\vec{t}}{ds} \quad (4)$$

$$(2)' \text{ باشتقاق} \Rightarrow \frac{d\vec{t}}{ds}\cdot\vec{b} + \vec{t}\,\frac{d\vec{b}}{ds} = 0 \Rightarrow \vec{t}\,\frac{d\vec{b}}{ds} = -\vec{b}\,\frac{d\vec{t}}{ds} \quad (5)$$

$$(3)' \text{ باشتقاق} \Rightarrow \frac{d\vec{n}}{ds}\cdot\vec{b} + \vec{n}\,\frac{d\vec{b}}{ds} = 0 \Rightarrow \vec{n}\,\frac{d\vec{b}}{ds} = -\vec{b}\,\frac{d\vec{n}}{ds} \quad (6)$$

وبالتالي نجد مقارنة (4) $\rightarrow$ (1) مع (6) $\rightarrow$ (1) أن:

مقارنة العلاقتين (2) مع (2) $\Rightarrow \beta = 0$

ومقارنة العلاقتين (3) مع (6) $\Rightarrow u = 0$

بتعويض (3) و (5) في (6) $\Rightarrow \gamma = -\mu$

• إذا لاحظنا أن:

$$\vec{n}\,\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{n}\cdot\vec{k}\,\vec{n} = k$$

من (1)

$$\vec{b}\,\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{b}\,k\,\vec{n} = 0$$ وأن:

سيكون

$$\lambda = \vec{t}\,\frac{d\vec{n}}{ds} \overset{(4)}{=} -\vec{n}\,\frac{d\vec{t}}{ds} = -k$$

$$\lambda = \vec{t}\,\frac{d\vec{p}}{ds} \overset{(5)}{=} -\vec{p}\,\frac{d\vec{t}}{ds} = 0$$

وأخيراً إذا وضعنا

$$\mu = -\gamma = \tau$$

وعوضنا كل من $\mu, \gamma, \lambda, \beta, \alpha$ في (*) و (*)'

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{ds} = -k\vec{t} + \tau\vec{q} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{q}}{ds} = -\tau\vec{n} \quad (3)$$

وبذلك وضعنا علاقات فرينيه وتم المطلوب