الثلاثاء: 16/12/2014

المحاضرة العشرون:

حل نفس التمرين السابق

طريقة تعيين معادلة دائرة التقوس

إن دائرة التقوس تقع في المستوي الملاصق، ولتعيين الدائرة الملاصقة بالتالي نقوم بتعيين المستوي الملاصق، ويمكن لتعيين هذا المستوي استخدام المتجهين $\vec{t}, \vec{n}$ كمتجهين واقعين في المستوي الملاصق أو المتجهين $\vec{r}', \vec{r}''$ بشرط أن يكونا مستقلين خطياً ومنه

$$[\vec{PQ}, \vec{r}', \vec{r}''] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0$$

وهي معادلة المستوي الملاصق لمنحنٍ ممثل بـ $\vec{r}(t)$ عند t عند نقطة كيفية P تحقق $\vec{OP} = \vec{r}(t)$، بشرط أن يكون $\vec{r}', \vec{r}''$ مستقلان خطياً

إن نقاط دائرة التقوس المنحني هي النقاط التي تبعد عن مركز الدائرة بنصف قطر التقوس وهو $\frac{1}{k(t)}$ وبالتالي فإن دائرة التقوس واقعة على كرة:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = \frac{1}{k^2(t)}$$

حيث $\vec{OC} = \vec{R}_c = (x_c, y_c, z_c)$

وبالتالي معادلة دائرة التقوس عند نقطة من المنحني هي تقاطع المستوي الملاصق للمنحني عند تلك النقطة مع الكرة التي مركزها مركز التقوس للمنحني عند تلك النقطة ونصف قطرها مقلوب التقوس.

أي المعادلة للمستوي ومعادلة الكرة هما المعادلتان الديكارتيتان لدائرة التقوس.

مفهوم الالتفاف لمنحني:

التعريف من الكتاب غير مطلوب

إن المماس (المشتق الأول) يحاول سحب النقطة على المماس

أما المشتق الثاني (الذي يقابله الناظم) يسحب المماس باتجاه معين وهذا ما جعل الناظم يتجه لأسفل أن تتحرك على المماس تذهب باتجاه المشتق الثاني (الذي يكون أضعف على الأغلب)

تعريف الالتفاف:

(1) هو معدل دوران المستوي الملاصق أثناء الحركة على المنحني

- وإن متجه واحدة ثنائي الناظم يرتبط بالمستوي الملاصق وعمودي عليه وإن الزاوية التي يصنعها المستوي الملاصق أثناء الدوران هي نفسها الزاوية التي يصنعها متجه ثنائي الناظم

(2) هو معدل تغير متجه واحدة ثنائي الناظم بالنسبة لطول القوس

مبرهنة:

يوجد في كل نقطة نظامية وغير منقوصة من منحني $s \longrightarrow \vec{r}(s)$ من الصنف C_3 التفاف يساوي τ المعطى في علاقات فرينيه (البرهان غير مطلوب)

ملاحظة: المنحني الواقع في مستوي التفافه صفر دوماً

مبرهنة:

إذا كانت P نقطة نظامية وغير منقوصة من منحني $s \longrightarrow \vec{r}(s)$ من الصنف C_3 فإن الالتفاف عند هذه النقطة يعطى بالمساواة التالية:

$$\tau = \frac{[\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''']}{k^2}$$

البرهان غير مطلوب

مبرهنة:

إذا كانت P نقطة نظامية وغير منقوصة في تمثيل $t \longrightarrow \vec{r}(t)$ من الصنف C_3 لمنحني ما فإن الالتفاف للمنحني عند P يعطى بالمساواة التالية:

$$\tau = \frac{[\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''']}{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|^2}$$

البرهان غير مطلوب

ملاحظة:

التقوس دوماً موجب، أما الالتفاف قد يكون موجب وقد يكون سالب (لأنه نظيم)

حساب التفاف اللولب عند نقطة كيفية منه:
اللولب من الصنف C^{∞} فهو من الصنف C_3 ، وجميع نقاط اللولب نظامية وغير مقوّمة
وتمثيل اللولب

$$\vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt)\ ;\quad t\in R,\ b\neq 0$$
$$\vec{r}\,'(t) = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$$
$$\vec{r}\,''(t) = (-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0)$$
$$\vec{r}\,'''(t) = (a\cdot\sin t,\ -a\cos t,\ 0)$$

$$[\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\vec{r}\,'''] = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}$$
$$= b(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t) = ba^2$$

ومن المحاضرة السابقة:
$$\vec{r}\,'\wedge\vec{r}\,'' = (ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2)$$
$$\|\vec{r}\,'\wedge\vec{r}\,''\| = a\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow \|\vec{r}\,'\wedge\vec{r}\,''\|^2 = a^2(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{[\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\vec{r}\,''']}{\|\vec{r}\,'\wedge\vec{r}\,''\|^2} = \frac{ba^2}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

والعلاقة هذه تعطينا الالتفاف لمنحني اللولب في نقطة اختيارية منه.

ملاحظة:

- في الحسابات عندما نوجد $\vec{r}\,'\wedge\vec{r}\,''$ في طلب سابق ونريد حساب الجداء المختلط $[\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\vec{r}\,''']$ من الأسهل حساب هذا الجداء من القانون $(\vec{r}\,'\wedge\vec{r}\,'')\cdot\vec{r}\,'''$

- التقوس والالتفاف للولب ثابتان في جميع نقاطه

ملاحظة:

- من تمرينات ربوكس صفحة 95 حتى صفحة 106 في الكتاب مخزون.

المعادلتان الطبيعيتان لمنحنٍ:

مبرهنة:

إذا كان $s \longmapsto k(s)$

$s \longmapsto \tau(s)$

دالتين معرفتين ومستمرتين على مجال مفتوح (محدود أو غير محدود)، سيوجد منحنٍ حيث يكون الوسيط s وسيطه الطبيعي، وحيث تمثل الدالتان k و τ التقوس والالتفاف على الترتيب، وإذا كان التقوس والالتفاف لمنحنيين مشتركين يمكن الحصول على أحد المنحنيين من الآخر بدوران وانسحاب مستمرين التقوس والالتفاف نفسه

الإثبات غير مطلوب

تعريف:

نقول عن الدالتين $s \longmapsto k(s)$

$s \longmapsto \tau(s)$

اللتين تعينان التقوس والالتفاف بدلالة طول القوس (الوسيط الطبيعي) وبالتالي تعينان المنحني "دون تحديد موضعه في الفضاء" إنهما المعادلتان الطبيعيتان (المميزتان الذاتيتان) للمنحني

ملاحظة:

إذا كان التقوس والالتفاف لمنحنٍ معلوم أي جميع نقاطه فهذان الدالتان كافيتان لمعرفة المنحني بشكله الهندسي وليس بموضعه.

وظيفة: عين المعادلتان الطبيعيتان للمنحني اللولبي.

وكل ما تبقى من هذا الفصل غير مطلوب

الفصل الثاني: - السطوح في الفضاء ثلاثي الأبعاد -

تعريف الشطر البسيط لسطح:

نقول عن مجموعة F من نقاط الفضاء ثلاثي البعد إنها شطر بسيط لسطح إذا وجد تقابل (تابع متباين وغامر) مستمر بينها وبين مستطيل مغلق في المستوي.

ملاحظة:

المقصود بالمستطيل المغلق هنا محيط المستطيل مع داخله.

بعبارة أخرى:

الشطر البسيط لسطح هو مجموعة النقاط في الفضاء الثلاثي الأبعاد متجهات مواضعها هي قيم دالة (جميع القيم) متجهية متباينة ومستمرة معرفة على مستطيل

F شطر بسيط لسطح $\Leftrightarrow$

$$\vec{r} : \Delta = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{مستمرة ومتباينة}$$

$$(u^1, u^2) \longmapsto \vec{r}(u^1, u^2)$$

$$\vec{r}(\Delta) = \vec{OF} = \{\vec{OP} \ ; \ P \in F\}$$

[illegible]

محقق

ملاحظة:

u^2 لا تعني مربع u وإنما المركبة الثانية لنقطة من المستطيل Δ، $(u^1)^2$ هذه تعني مربع u^1

- الدالة $\vec{r}$ تسمى تمثيلاً وسيطياً للشطر البسيط للسطح، ونسمي u^1، u^2 وسيطا هذا التمثيل

مثال:

لتكن

$$f : \Delta = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto z = f(x, y)$$

حيث f دالة حقيقية بمتغيرين ومستمرة على المستطيل Δ

في الحالة العامة فإن بيان الدالة الحقيقية بمتغيرين هو سطح في الفراغ

أثبت أن بيان الدالة f هو شطر بسيط لسطح.

الحل:

$$\text{Graph}\{f\} = \{(x, y, f(x,y)) \; ; \; (x,y) \in \Delta\}$$

وسيط الدالة:

$$\vec{r}(u,v) = (u, v, f(u,v)) \quad ; \quad (u,v) \in \Delta$$

هي دالة مستمرة على Δ لأن مركباتها هي دوال مستمرة على Δ حيث f مستمرة فرضاً على Δ

u, v كثيرات حدود بمتغيرين مستمرة على R^2 بكاملها فهي مستمرة على Δ.

إثبات التباين للدالة $\vec{r}$

$$\vec{r}(u_1, v_1) = \vec{r}(u_2, v_2) \Rightarrow (u_1, v_1, f(u_1, v_1)) = (u_2, v_2, f(u_2, v_2))$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = u_2 \\ v_1 = v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2) \Rightarrow$$ $\vec{r}$ متباينة

$$\vec{OG} = \{\vec{OP} \; ; \; P \in G\} = \{(x, y, f(x,y)) \; ; \; (x,y) \in \Delta\}$$

$$= \{\vec{r}(x,y) \; ; \; (x,y) \in \Delta\} = \vec{r}(\Delta)$$

إذاً أي دالة حقيقية بمتغيرين مستمرة على مستطيل مغلق بيانها هو سطح بسيط