ص125 :

أثبت أن علاقة التكافؤ على التمثيلات الوسيطية هي انعكاسية تناظرية ومتعدية.

الحل: إثبات الصفة الانعكاسية :

ليكن لدينا التمثيل $\vec{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ولنثبت أنه يكافئ نفسه

$t \longmapsto \vec{r}(t)$

لنأخذ التطبيق المطابق : $\phi : I \longrightarrow I$

$t \longmapsto \phi(t) = t$

إن هذا التطبيق مستمر وغامر كما نعلم، وهو متزايد تماماً لأن : $\phi'(t) = 1 > 0$

ونعلم أن التطبيق المطابق يحقق : $\vec{r} = \vec{r} \circ \phi$

إذن وجدت دالة متزايدة تماماً ومستمرة وغامرة من I إلى I تحقق العلاقة الأخيرة، ومنه فالتمثيل $\vec{r}$ يكافئ نفسه، ومنه فعلاقة التكافؤ بين التمثيلات الوسيطية علاقة انعكاسية.

إثبات الصفة التناظرية :

ليكن لدينا التمثيل $\vec{r}_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ المكافئ للتمثيل $\vec{r}_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longmapsto \vec{r}_1(t)$ ، $\tau \longmapsto \vec{r}_2(\tau)$

أي توجد دالة متزايدة تماماً ومستمرة وغامرة : $\phi : I_2 \longrightarrow I_1$

$\tau \longmapsto \phi(\tau) = t$

بحيث يكون $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi$

ولكن ϕ متزايدة تماماً فهي متباينة، ولما كانت غامرة أيضاً فهي تقابل، ويوجد لها تقابل عكسي ϕ^{-1} متزايد تماماً ومستمر وغامر ويكون : $\phi^{-1} : I_1 \longrightarrow I_2$

$t \longmapsto \phi^{-1}(t) = \tau$

ويتحقق لدينا ما يلي : $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi$

$$\vec{r}_2 \circ \phi^{-1} = \vec{r}_1 \circ \underbrace{\phi \circ \phi^{-1}}_{\text{التطبيق المطابق}} \Longrightarrow \vec{r}_2 \circ \phi^{-1} = \vec{r}_1$$

إذن وجدت دالة متزايدة تماماً ومستمرة وغامرة من I_1 إلى I_2 تحقق العلاقة الأخيرة ومنه فالتمثيل $\vec{r}_2$ يكافئ التمثيل $\vec{r}_1$.

مما سبق نجد أن علاقة التكافؤ بين التمثيلات الوسيطية علاقة تناظرية.

إثبات الصفة المتعدية:

لتكن لدينا المتمثيلات الوسيطية التالية:

$$\vec{r}_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \vec{r}_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \vec{r}_3 : I_3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \vec{r}_1(t) \qquad \tau \longmapsto \vec{r}_2(\tau) \qquad u \longmapsto \vec{r}_3(u)$$

ولنفرض أن $\vec{r}_1$ مكافئ لِ $\vec{r}_2$ وأن $\vec{r}_2$ مكافئ لِ $\vec{r}_3$.

ولنثبت أن $\vec{r}_1$ مكافئ لِ $\vec{r}_3$.

* $\vec{r}_1$ يكافئ $\vec{r}_2$ أي توجد دالة متزايدة تماماً مستمرة وغامرة:

$$\phi_1 : I_2 \longrightarrow I_1$$

$$\tau \longmapsto \phi_1(\tau) = t$$

بحيث يكون: $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi_1$

* $\vec{r}_2$ يكافئ $\vec{r}_3$ أي توجد دالة متزايدة تماماً، مستمرة وغامرة:

$$\phi_2 : I_3 \longrightarrow I_2$$

$$u \longmapsto \phi_2(u) = \tau$$

بحيث يكون: $\vec{r}_3 = \vec{r}_2 \circ \phi_2$

* لنأخذ تركيب الدالتين ϕ_1 , ϕ_2 وليكن $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$.

نعلم أن تركيب دالتين متزايدتين تماماً، مستمرتين وغامرتين هو دالة متزايدة تماماً، مستمرة، وغامرة. إذن أصبحت ϕ بالشكل:

$$\phi : I_3 \longrightarrow I_1$$

$$u \longmapsto \phi(u) = \phi_1 \circ \phi_2(u) = \phi_1(\phi_2(u))$$

$$= \phi_1(\tau) = t$$

لدينا: $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi_1$

$$\vec{r}_2 \circ \phi_2 = \vec{r}_1 \circ \phi_1 \circ \phi_2 \Rightarrow \vec{r}_3 = \vec{r}_1 \circ \phi$$

إذن استطعنا إيجاد دالة ϕ متزايدة تماماً ومستمرة وغامرة وتحقق العلاقة السابقة من أجل كل $u \in I_3$.

إذن يكون $\vec{r}_1$ مكافئ لِ $\vec{r}_3$.

ومما سبق نجد أن علاقة التكافؤ بين المتمثيلات الوسيطية هي علاقة متعدية.

3 ص 125:

أثبت أن التمثيلين الوسيطين الآتيين متكافئان:

$$t \longrightarrow (\ln t, \sin(\ln t), t) \quad ; 0 < t < \infty$$

$$\tau \longrightarrow (\tau, \sin\tau, e^{\tau}) \quad ; -\infty < \tau < \infty$$

الحل: لنأخذ الدالة:

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \infty[$$

$$\tau \longmapsto \phi(\tau) = e^{\tau} = t$$

فنجد أن:

$$\vec{r}_1 \circ \phi(\tau) = \vec{r}_1(\phi(\tau)) = (\ln\phi(\tau), \sin(\ln\phi(\tau)), \phi(\tau))$$

$$= (\ln e^{\tau}, \sin(\ln e^{\tau}), e^{\tau}) = (\tau, \sin\tau, e^{\tau}) = \vec{r}_2(\tau)$$

إذن استطعنا أن نوجد دالة من منطلق $\vec{r}_2$ إلى منطلق $\vec{r}_1$ متزايدة تماماً ومستمرة وغامرة

كما نعلم عن الدالة الأسية، وتحقق العلاقة: $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi$

ومنه فالتمثيلان $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ متكافئان.

---

4 ص 125:

أثبت أنه لا توجد نقاط شاذة للطريق:

$$[-2\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad t \longrightarrow \left(1+\cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

وأن المنحني المعين بهذا التمثيل يقع على الكرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 ، وعلى الأسطوانة:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

الحل:

$$* \quad \vec{r}' : [-2\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \left(-\sin t, \cos t, \cos\frac{t}{2}\right)$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \cos^2\frac{t}{2}} = \sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}} \geq 1 \quad \forall t$$

ومنه فإن r' موجود وغير معدوم $\forall t \in [-2\pi, 2t]$

أي أنه لا توجد نقاط شاذة للطريق المعطى.

/ /

* معادلة الكرة التي مركزها 0 ونصف قطرها 2 : $x^2+y^2+z^2=4$

لنعوض مركبات $\vec{r}$ في هذه المعادلة :

$$(1+\cos t)^2+(\sin t)^2+(2\sin\frac{t}{2})^2 \overset{?}{=} 4$$

$$L_1 = 1+2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t+4\sin^2\frac{t}{2}$$
$$= 2+2\cos t+2(1-\cos t)$$
$$= 2+2\cos t+2-2\cos t = 4 = L_2$$

ومنه مركبات $\vec{r}$ تحقق معادلة الكرة ، ومنه كل نقطة من المنحني المعين بالتمثيل $\vec{r}$ تقع على الكرة المذكورة .

* معادلة الأسطوانة : $(x-1)^2+y^2=1$

$$(1+\cos t-1)^2+\sin^2 t = \cos^2 t+\sin^2 t = 1$$

إذاً مركبات $\vec{r}$ تحقق معادلة الأسطوانة المعطاة إذن كل نقطة من المنحني المعين بالتمثيل $\vec{r}$ تقع على هذه الأسطوانة .

---

5 ص125 :

- أثبت أن النقاط $t_k=2\pi k$ ، حيث k عدد صحيح ، هي نقاط شاذة أساسية للدويري .
- وأن $t=0$ هي نقطة شاذة أساسية لـ : $x=t^2 \quad , \quad y=t^3$

الحل : - نعلم أن الدويري يمثل بـ :

$$\vec{r} : \begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

نبحث عن أول مشتق غير معدوم عند $t_k=2\pi k$:

$$\vec{r}' : \begin{cases} x' = a(1-\cos t) \\ y' = a\sin t \\ z' = 0 \end{cases} \qquad \vec{r}'' : \begin{cases} x'' = a\sin t \\ y'' = a\cos t \\ z'' = 0 \end{cases}$$

$$\vec{r}'(t_k) = (0,0,0) = \vec{0}$$
$$\vec{r}''(t_k) = (0,a,0) \neq \vec{0}$$

ومنه مرتبة أول مشتق غير معدوم هي المرتبة الثانية ، أي مرتبة زوجية .
ومنه فالنقاط t_k هي نقاط شاذة أساسية للدويري .

$\vec{r} = (t^2, t^3, 0)$

$\vec{r}' = (2t, 3t^2, 0)$, $\vec{r}'(0) = \vec{0}$

$\vec{r}'' = (2, 6t, 0)$, $\vec{r}''(0) = (2, 0, 0) \neq \vec{0}$

ومنه مرتبة أول مشتق غير معدوم هي المرتبة الثانية ، أي مرتبة زوجية
ومنه فالنقطة $t = 0$ نقطة شاذة أساسية للمنحني المعطى بالتمثيل $\vec{r}$.

---

6 ص 125 :

أوجد تمثيلاً وسيطياً لا يحوي جذوراً للمنحني الناتج عن تقاطع الأسطوانة :

$x^2 + y^2 = 1$

والمستوي : $x + y + z = 1$

الحل : إذا أخذنا $x = t$ فيكون : $y = \sqrt{1 - t^2}$

ويكون $z = 1 - t - \sqrt{1 - t^2}$.

ولكن هذا التمثيل يحوي جذوراً ، لنبحث عن تمثيل آخر .

لنأخذ $x = \cos t$, $y = \sin t$ $\Leftarrow$ $z = 1 - (\sin t + \cos t)$.

أي يصبح التمثيل الوسيطي بالشكل :

$$\vec{r}(t) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 - (\sin t + \cos t) \end{cases}$$

وهذا التمثيل لا يحوي جذوراً فهو مقبول .

تم 7 ص 126 :

- أثبت وجود دالة غامرة ومتزايدة ومستمرة للفترة $[a,b]$ على الفترة $[0,1]$.
- وكذلك وجود دالة غامرة ومتزايدة ومستمرة للفترة $]-\infty,+\infty[$ على $]0,1[$.

الحل : 1) لنأخذ الدالة التي تمثل قطعة مستقيمة :

$$\phi : [0,1] \longrightarrow [a,b]$$
$$t \longmapsto (1-t)a + tb$$

وهذه الدالة كما نعلم مستمرة ومتباينة .

وهي متزايدة تماماً لأن : $\phi'(t) = b-a > 0$

كما أنها غامرة ، ومنه فهي تقابل ويوجد لها تقابل عكسي وليكن $h = \phi^{-1}$ مستمر أيضاً .

$$u = (1-t)a + tb \implies u-a = (b-a)t$$
$$\implies t = \frac{u-a}{b-a} = h(u)$$

فنضع الدالة h بالشكل :

$$h : [a,b] \longrightarrow [0,1]$$
$$u \longmapsto \frac{u-a}{b-a}$$

وهي دالة مستمرة وغامرة . وهي متزايدة تماماً أيضاً لأن :

$$h' = \frac{1}{b-a} > 0$$

وبهذا نكون وجدنا دالة غامرة ومتزايدة ومستمرة للفترة $[a,b]$ على الفترة $[0,1]$

2)- لنأخذ الدالة :

$$tg :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow]-\infty, \infty[$$

وهي دالة مستمرة ومتزايدة تماماً ، وتقابل ، ويوجد لها تقابل عكسي مستمر :

$$tg^{-1} :]-\infty, \infty[\longrightarrow]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$
$$t \longmapsto tg^{-1}\, t = u$$

وهي دالة مستمرة ، تقابل ، وهي متزايدة تماماً لأن : $(tg^{-1}t)' = \frac{1}{1+t^2} > 0$

- ولنأخذ أيضاً الدالة h التالية على غرار الدالة المأخوذة في الطلب السابق ولكن بفتح أطراف المجالات:

$$h : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow]0,1[$$

$$u \longmapsto \frac{u+\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{u}{\pi} + \frac{1}{2}$$

وهي دالة مستمرة، غامرة، ومتزايدة تماماً.

* فإذا أخذنا الآن تركيب الدالتين tg^{-1}, h فإننا سنحصل على دالة مستمرة، غامرة ومتزايدة تماماً للفترة $]-\infty, +\infty[$ على $]0,1[$ وهي:

$$\phi = tg^{-1} \circ h :]-\infty, +\infty[\longrightarrow]0,1[$$

---

8 ص 126:

أوجد طول الطريق:

$$\vec{r}(t) = (3\,ch2t, 3\,sh2t, 6t) \quad ; \quad 0 \leq t \leq \pi$$

الحل:

$$l = \int_0^{\pi} \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt$$

$$\vec{r}\,'(t) = (6\,sh2t, 6\,ch2t, 6)$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = 6\sqrt{sh^2 2t + ch^2 2t + 1} = 6\sqrt{ch4t + 1} = 6\sqrt{2ch^2 2t}$$

$$l = 6\sqrt{2}\int_0^{\pi} ch2t\, dt$$

$$= 6\sqrt{2}\left[\frac{1}{2} sh2t\right]_0^{\pi} = 3\sqrt{2}\,.\, sh2\pi$$

تمرين 126:

أوجد تمثيلاً طبيعياً للمنحني:

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos t , e^t \sin t , e^t) \; ; \; -\infty < t < \infty$$

الحل:

الوسيط الطبيعي:

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{r}'(u)\| \, du$$

$$\vec{r}'(t) = \left(e^t(\cos t - \sin t) , e^t(\sin t + \cos t) , e^t\right)$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{e^{2t}\left[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1\right]}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = e^t \sqrt{\cos^2 t - 2\sin t \cos t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t + 1}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{3}\, e^t$$

لنأخذ $t_0 = 0$ ، ولنوجد الوسيط الطبيعي:

$$s(t) = \int_0^t (\sqrt{3}\, e^u) \, du$$

$$s(t) = \sqrt{3}\,[e^u]_0^t = \sqrt{3}\,(e^t - 1)$$

$$\Longrightarrow \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 = e^t \Longrightarrow t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)$$

فيكون التمثيل الطبيعي هو:

$$\vec{r}_1 : \begin{cases} x_1 = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \cos \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \\ y_1 = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \sin \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \\ z_1 = \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \end{cases}$$

10 ص 126 :

- أوجد طول قوس واحد $0 \le t \le 2\pi$ للدويري .
- أوجد طول الدويري بين النقطتين اللتين تقابلان القيمتين 0 و t للوسيط ، ومن ثم
- أوجد تمثيلاً طبيعياً له .

الحل 1) نعلم أن الدويري يعطى بالتمثيل :

$$\vec{r}: \begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \\ z = 0 \end{cases}$$

طول قوس واحد $0 \le t \le 2\pi$ هو نفسه سيكون طول القوس بين أي نقطتين شاذتين متتاليتين :

$$l = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(t)\| dt$$

$$\vec{r}': \begin{cases} x' = a(1-\cos t) \\ y' = a\sin t \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$\|\vec{r}'\| = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}$$

$$\|\vec{r}'\| = \sqrt{a^2 - 2a^2\cos t + a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = a\sqrt{2-2\cos t}$$

$$\|\vec{r}'\| = a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t} = a\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$$

$$\Longrightarrow l = 2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt$$

ولكن عندما $0 \le t \le 2\pi \Leftarrow 0 \le \frac{t}{2} \le \pi \Leftarrow \sin\frac{t}{2} \ge 0$

$$l = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^t$$

$$l = -4a[\cos\pi - \cos 0] = -4a[-1-1] = 8a$$

② طول جزء الدويري بين النقطتين اللتين تقابلان القيمتين 0 و t للوسيط :

$$\ell_1 = \int_0^t \|\vec{r}\,'(u)\|\,du = 2a\int_0^t \left|\sin\frac{u}{2}\right| du$$

نعلم أن النقاط الشاذة للدويري هي $t_k = 2\pi k$.

فإذا كانت $t \in [t_k, t_{k+1}] \Longrightarrow t \in [2\pi k, 2\pi(k+1)]$

$$\Longrightarrow \frac{t}{2} \in [\pi k, \pi(k+1)]$$

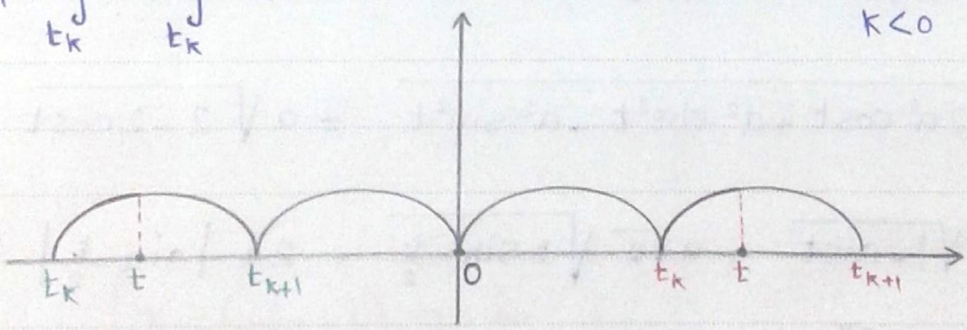
فإذا كان k عدداً فردياً فإن: $\sin\frac{t}{2} \leqslant 0$

وإذا كان k عدداً زوجياً فإن $\sin\frac{t}{2} \geqslant 0$

من جهة أخرى وجدنا أن طول القوس من الدويري بين نقطتين شاذتين متتاليتين هو $8a$ أي: $\int_{t_k}^{t_{k+1}} = 8a \Longrightarrow \int_0^{t_k} = 8ak$

فإذا كانت $t>0$، $k>0$ كان: $\ell_1 = \int_0^{t_k} + \int_{t_k}^{t} = 8ak + I$

وإذا كانت $t<0$، $k<0$ كان: $\ell_1 = \int_{t_k}^{0} - \int_{t_k}^{t} = -8ak - I$



ولكن: $I = \int_{t_k}^{t} \|\vec{r}\,'(u)\|\,du = 2a\int_{t_k}^{t} \left|\sin\frac{u}{2}\right| du$

k فردي $\Longrightarrow I = -2a\int_{t_k}^{t} \sin\frac{u}{2}\,du = -2a\left[-2\cos\frac{u}{2}\right]_{t_k}^{t}$

$$I = 4a\left(\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{t_k}{2}\right) = 4a\left(\cos\frac{t}{2} + 1\right)$$

k زوجي $\Rightarrow I = 2a\int_{t_k}^{t} \sin\frac{u}{2}\,du = 2a\left[-2\cos\frac{u}{2}\right]_{t_k}^{t}$

$$I = -4a\left(\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{t_k}{2}\right) = -4a\left(\cos\frac{t}{2} - 1\right)$$

$$t>0 \Rightarrow l_1 = \begin{cases} 8ak + 4a\left(\cos\frac{t}{2}+1\right) & ; \quad k>0 \text{ فردي} \\ 8ak - 4a\left(\cos\frac{t}{2}-1\right) & ; \quad k>0 \text{ زوجي} \end{cases}$$

$$t=0 \Rightarrow l_1 = 0 \quad ; \quad k=0$$

$$t<0 \Rightarrow l_1 = \begin{cases} -8ak - 4a\left(\cos\frac{t}{2}+1\right) & ; \quad k<0 \text{ فردي} \\ -8ak + 4a\left(\cos\frac{t}{2}-1\right) & ; \quad k<0 \text{ زوجي} \end{cases}$$

3) التمثيل الطبيعي للدويري:

الوسيط الطبيعي: $S = \int_0^t \|\vec{r}'(u)\|du = \int_0^{t_k} \|\vec{r}'(u)\|du + \int_{t_k}^{t} \|\vec{r}'(u)\|du$

$$S = 8ak + I = \begin{cases} 8ak + 4a\left(\cos\frac{t}{2}+1\right) & ; \quad k \text{ فردي} \\ 8ak - 4a\left(\cos\frac{t}{2}-1\right) & ; \quad k \text{ زوجي} \end{cases}$$

لنوجد $t(S)$:

$$t(S) = \begin{cases} 2\arccos\left(\frac{S}{4a} - 2k - 1\right) & ; \quad k \text{ فردي} \\ 2\arccos\left(\frac{-S}{4a} - 2k + 1\right) & ; \quad k \text{ زوجي} \end{cases}$$

ومنه فالتمثيل الطبيعي للدويري هو:

$$\vec{r}_1 : \begin{cases} x_1 = a\left(t(S) - \sin t(S)\right) \\ y_1 = a\left(1 - \cos t(S)\right) \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

حيث $t(S)$ معطى كما سبق.

/ /

11 ص 126 :

أوجد طول السحبي بين النقطتين اللتين تقابلان القيمتين $\frac{\pi}{2}$ و t للوسيط.
($\frac{\pi}{2}$ نقطة شاذة).

الحل: نعلم أن السحبي يمثل بـ:

$$\vec{r}: \begin{cases} a\left(\cos t + \ln\left(tg \frac{t}{2}\right)\right) \\ a\sin t \\ 0 \end{cases} \quad ; \; 0 < t < \pi$$

$$\ell = \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \|\vec{r}\,'(u)\|\, du$$

$$\vec{r}\,': \begin{cases} a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) \\ a\cos t \\ 0 \end{cases}$$

$$\|\vec{r}\,'\| = a\sqrt{\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right)^2 + \cos^2 t}$$

$$\|\vec{r}\,'\| = a\sqrt{\sin^2 t - 2 + \frac{1}{\sin^2 t} + \cos^2 t} = a\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1}$$

$$\|\vec{r}\,'\| = a\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} = a\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = a\,|ctg\, t|$$

إن $t \in]0, \pi[$: في المجال $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ يكون $ctg\, t < 0$

$$\Rightarrow \ell = -a\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} ctg\,u\, du = -a\left[\ln \sin(u)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{t}$$

$$\ell = -a\left[\ln \sin t - \ln \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = -a \ln \sin t$$

أما في المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$ فيكون $ctg\, t > 0$ ويكون:

$$\ell = a\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} ctg\,u\, du = a\left[\ln \sin(u)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{t} = a \ln \sin t$$

12 ص126:

أثبت أن التمثيل التالي هو تمثيل وسيطي آخر للسحبي:

$$x = a\left(\ln t + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \quad , \quad y = \frac{2at}{1+t^2} \quad ; \ 0<t<\infty$$

الحل: نعلم أنه يمكن تمثيل السحبي بـ:

$$\vec{r}_1 : \begin{cases} a\left(\cos t + \ln\left(tg \frac{t}{2}\right)\right) \\ a \sin t \\ 0 \end{cases} \quad ; \ 0<t<\pi$$

فإذا أخذنا الدالة:

$$\phi :]0,\pi[\longrightarrow]0,\infty[$$
$$\tau \longmapsto tg \frac{\tau}{2} = t$$

فإن هذه الدالة متزايدة تماماً كما نعلم ومستمرة وغامرة.

لنأخذ تركيب مركبات التمثيل $\vec{r}$ مع ϕ:

$$x = a\left(\ln\left(tg\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1-tg^2\frac{\tau}{2}}{1+tg^2\frac{\tau}{2}}\right) = a\left(\ln\left(tg\frac{\tau}{2}\right)+\cos\tau\right) = x_1$$

$$y = \frac{2a\, tg\frac{\tau}{2}}{1+tg^2\frac{\tau}{2}} = a\sin\tau = y_1$$

$$z = 0 = z_1$$

أي وجدت دالة من منطلق $\vec{r}_1$ إلى منطلق التمثيل المعطى متزايدة ومستمرة وغامرة.

وتحقق:

$$\vec{r} \circ \phi = \vec{r}_1$$

ومنه فالتمثيلان $\vec{r}_1, \vec{r}$ متكافئان

ومنه يكون $\vec{r}$ تمثيلاً آخر للسحبي وهو المطلوب.

13 ص 126 :

أثبت أن المتجهات المماسة للولب في نقاط مختلفة منه ، تقطع بزاوية ثابتة محور oz.

الحل :

إن الزاوية بين المتجهات المماسة للولب في نقاط مختلفة منه والمحور oz هي الزاوية بين $\vec{t}$, $\vec{k}$ (ولتكن α) حيث $\vec{k}=(0,0,1)$ متجه الواحدة المحمول على المحور oz.

والآن لنوجد $\vec{t}$:

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \quad ; \ -\infty < t < \infty$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{cases} x' = -a\sin t \\ y' = a\cos t \\ z' = b \end{cases}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$\vec{t}\cdot\vec{k} = \|\vec{t}\|.\|\vec{k}\|.\cos\alpha = \cos\alpha$$

$$\vec{t}\cdot\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left((-a\sin t)(0)+(a\cos t)(0)+b\right) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ونلاحظ أن α لا تتعلق بـ t ، وبالتالي فهي ثابتة في جميع نقاط اللولب .

/ /

14 ص 126 ل:

أثبت أنه إذا تقاطعت جميع مماسات منحنٍ نظامي من الصف C_2 في النقطة نفسها كان خطاً مستقيماً.

الحل: ليكن $\vec{r}$ تمثيلاً للمنحني γ بحيث: $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$

$\vec{r}' = (x'(t), y'(t), z'(t))$

عندئذٍ يكون التمثيل الوسيطي للمستقيم المماس لـ γ في نقطة منه:

$$\vec{R}(u) = \left(x(t) + u(t)x'(t) \;,\; y(t) + u(t)y'(t) \;,\; z(t) + u(t)z'(t)\right)$$

ولنفرض أن كل مماسات المنحني γ تتقاطع في النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

عندئذٍ:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x(t) + u(t)x'(t) \\ y_0 &= y(t) + u(t)y'(t) \\ z_0 &= z(t) + u(t)z'(t) \end{aligned}\right\} \quad \forall t$$

لنشتق طرفي كل من العلاقات الثلاثة السابقة:

$$0 = x'(t) + u'(t)x'(t) + u(t)x''(t) \Longrightarrow (1+u'(t))x'(t) + u(t)x''(t) = 0$$

$$0 = y'(t) + u'(t)y'(t) + u(t)y''(t) \Longrightarrow (1+u'(t))y'(t) + u(t)y''(t) = 0$$

$$0 = z'(t) + u'(t)z'(t) + u(t)z''(t) \Longrightarrow (1+u'(t))z'(t) + u(t)z''(t) = 0$$

ومنه نستنتج أن:

$$(1+u'(t))\vec{r}'(t) + u(t)\vec{r}''(t) = \vec{0}$$

ومنه يوجد تركيب خطي معدوم لـ $\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)$ فهما مرتبطان خطياً

$$\Leftarrow \quad \vec{r}' \wedge \vec{r}'' = \vec{0}$$

_ نعلم أن التقوس في نقطة ما من γ يعطى بالعلاقة:

$$K = \frac{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3} \Longrightarrow K = 0 \quad \forall t$$

ومنه فإن γ هو خط مستقيم.

/ /

15 ص 126:

أوجد المنحني الناتج عن تقاطع المستوي oxy والمستقيمات المماسة للولب:

$$t \longrightarrow \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \qquad ; t>0$$

الحل:

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \qquad ; t>0$$

التمثيل الوسيطي للمستقيمات المماسة للولب المعطى:

$$\vec{R}(u) = \vec{r}(t) + u\vec{r}'(t)$$

$$\vec{R}(u) = (\cos t - u\sin t, \ \sin t + u\cos t, \ t+u)$$

معادلة المستوي xoy هي: $z=0$.

المنحني المطلوب هو تقاطع $\vec{R}(u)$ مع xoy وهذا يكافئ أن:

$$t+u=0 \Longrightarrow t=-u$$

$$t>0 \Longrightarrow u<0$$

ومنه يكون تمثيل المنحني المطلوب هو:

$$\vec{R}_1(u) = (\cos u + u\sin u, \ u\cos u - \sin u, 0) \qquad ; u<0$$

---

16 ص 126:

أثبت أن المتجهات المماسة على طول المنحني:

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{2}{3}t, t^2, t^3\right)$$

تصنع زاوية ثابتة مع المتجه $\vec{u} = (1,0,1)$

الحل: يعطى متجه واحدة المماس على طول المنحني المعطى بـ: $\vec{t} = \dfrac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$

$$\vec{r}'(t) = \left(\frac{2}{3}, 2t, 3t^2\right)$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\frac{4}{9} + 4t^2 + 9t^4} = \sqrt{9\left(t^2+\frac{2}{9}\right)^2} = 3\left(t^2+\frac{2}{9}\right)$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = 3t^2 + \frac{2}{3} = \frac{9t^2+2}{3}$$

$$\Longrightarrow \vec{t} = \left(\frac{2}{9t^2+2}, \frac{6t}{9t^2+2}, \frac{9t^2}{9t^2+2}\right)$$

لتكن θ الزاوية بين المتجهين $\vec{t}, \vec{u}$ عندئذٍ:

$$\cos\theta = \frac{\vec{t}\cdot\vec{u}}{\|\vec{t}\|\cdot\|\vec{u}\|}$$

$$\|\vec{t}\| = 1 \quad , \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\vec{t}\cdot\vec{u} = \frac{2}{9t^2+2} + \frac{9t^2}{9t^2+2} = \frac{9t^2+2}{9t^2+2} = 1$$

$$\Longrightarrow \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

ونلاحظ أن θ لا تتعلق بـ t ، وبالتالي فهي ثابتة على طول المنحني .

---

17 ص127 :

أوجد معادلة المستوي الملاصق لكل من المنحنيات التالية ، وذلك في النقطة الموافقة لقيمة الوسيط $t=1$.

أ) $x = y \quad , \quad x = \frac{1}{2}z^2$

لنأخذ $z = t \Longleftarrow y = x = \frac{1}{2}t^2$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t^2, t\right)$$

تعطى معادلة المستوي الملاصق :

$$[\vec{R} - \vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)] = 0$$

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}(1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{r}'(t) = (t, t, 1) \Longrightarrow \vec{r}'(t_0) = \vec{r}'(1) = (1,1,1)$$

$$\vec{r}''(t) = (1,1,0) \Longrightarrow \vec{r}''(t_0) = \vec{r}''(1) = (1,1,0)$$

/ /

$$\begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & y-\frac{1}{2} & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (z-1)(0) - 1\left(x-\frac{1}{2}-y+\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y - x = 0}$$

ج)

$x = t^2 \quad , \quad y = 1 - t^2 \quad , \quad z = 2t$

$\vec{r}(1) = (1,0,2)$

$\vec{r}'(t) = (2t, -2t, 2) \Rightarrow \vec{r}'(1) = (2,-2,2)$

$\vec{r}''(t) = (2,-2,0) \Rightarrow \vec{r}''(1) = (2,-2,0)$

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y & Z-2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2\left[(X-1)(-2) - 2(Y)\right] = 0$$

$$\Rightarrow 4X + 4Y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{X + Y - 1 = 0}$$

د)

$x = t \quad , \quad y = t^2 \quad , \quad z = t^3$

$\vec{r}(1) = (1,1,1)$

$\vec{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2) \Rightarrow \vec{r}'(1) = (1,2,3)$

$\vec{r}''(t) = (0,2,6t) \Rightarrow \vec{r}''(1) = (0,2,6)$

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y-1 & Z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (X-1)(12-6) - 6(Y-1) + 2(Z-1) = 0$$

$$\Rightarrow 6X - 6 - 6Y + 6 + 2Z - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{3X - 3Y + Z - 1 = 0}$$