التاريخ: 7/12/2014

المحاضرة السابعة عشرة:

تعاريف:

1. زاوية منحنيين: مماسين.

تعرف الزاوية بين منحنيين: $t \longrightarrow \vec{r}_1(t)$ ، $\tau \longrightarrow \vec{r}_2(\tau)$

في النقطة المشتركة p_0 التي تقابل القيمتين t_0 ، τ_0 للوسيطين t ، τ ، أنها الزاوية بين المتجهين المماسين للمنحنيين في تلك النقطة، وبشرط أن هذه النقطة نظامية في التمثيلين أي:

$$\vec{r}_1'(t_0) \neq \vec{0} \quad , \quad \vec{r}_2'(\tau_0) \neq \vec{0}$$

عندئذٍ يمكن حساب هذه الزاوية من العلاقة:

$$\cos\phi = \frac{\vec{r}_1'(t_0) \cdot \vec{r}_2'(\tau_0)}{\|\vec{r}_1'(t_0)\| \cdot \|\vec{r}_2'(\tau_0)\|}$$

2. المستوي الملاصق:

ليكن L منحنياً ما و p_0 نقطة منه، نقول عن المستوي الذي له تلامس من مرتبة عليا (من المرتبة الثانية على الأقل) مع المنحني في النقطة p_0 (في حال وجوده) إنه المستوي الملاصق لـ L عند p_0.

مبرهنة:

ليكن L منحنياً ما، و $\vec{r}(s) \longrightarrow s$ تمثيلاً طبيعياً له من الصف C^2 على الأقل وليكن p_0 نقطة نظامية لـ L ومقابلة لـ s_0 و $\vec{r}(s)$ غير مصدوم، عندئذٍ يوجد مستوي ملاصق وحيد للمنحني L عند p_0.

الإثبات:

(موجود بالكتاب ومطلوب) ولكن الدكتور لم يقوم بالإثبات أعطى نقط مكرمة الإثبات.

نكرة الإنبات:

(إنّ نكرة الإنبات مشابهة لنكرة إنبات وجود مماسة المستقيم المماس.)

نعلم أنّ المستوي يتعين بنقطة ومتجهين غير مرتبطين خطياً

لدينا: $\vec{r}(s) \neq \vec{0}$ (لأن p_0 نقطة نظامية)

و $\vec{r}'(s) \neq \vec{0}$ (مرتبطان)

إنّ $\vec{r}'(s)$ يماسّ $\vec{r}(s)$ [لأنّ أيّ منحنى ثابت بالطويلة مشتقه يماسّه].

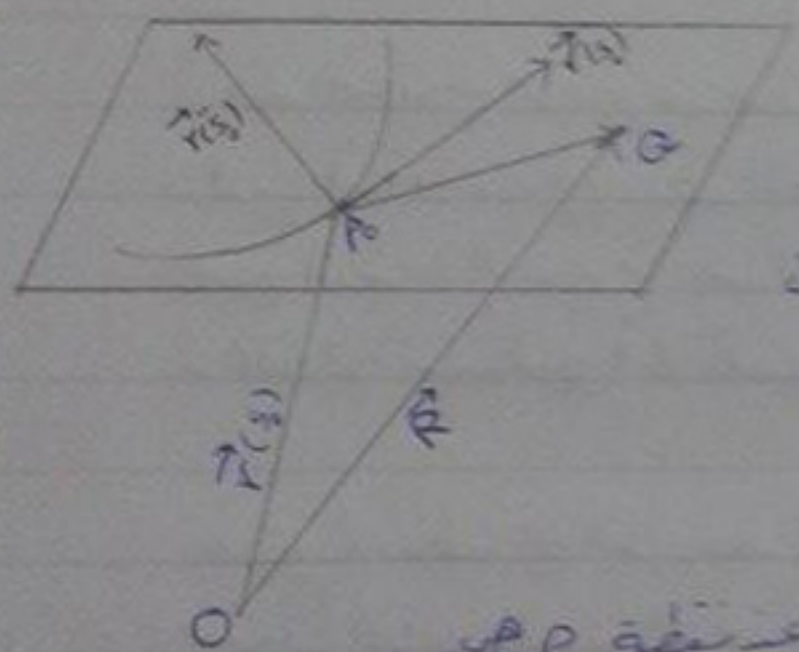
و المشتق $\vec{r}'(s)$ هو منحنى واحدة طويلته ثابت وبالتالي مشتقه $\vec{r}''(s)$ يماسّه.

(الطويلة $s=1$)

وبالتالي مبدأ معادلة المستوي هي:

$$\vec{R} = \overrightarrow{OO} \quad , \quad [\vec{R} - \vec{r}(s), \vec{r}'(s), \vec{r}''(s)] = 0$$

أثبت أنّ هذا المستوي هو مستوي ملاصق وحيد أي
له تلامس من المرتبة الثانية على الأقل مع المنحنى،
ثم أثبت الوحدانية لهذا المستوي؟



لإثبات الوحدانية نفرض وجود مستوي ملاصق
آخر للمنحنى ونثبت أنه يساوي المستوي أعلاه.

ملاحظات:

1) إذا كانت مرتبة تلامس المستوي الملاصق للمنحنى عند النقطة p_0 هي أكبر من 2 (نحصل هذه الأخيرة عندما $\vec{r}''(s) = \vec{0}$ على سبيل المثال) في هذه الحالة نسمي النقطة p_0 نقطة منبطحة للمنحنى

2) إذا كان $\vec{r}''(s) = \vec{0}$ فإنّ المستوي الملاصق للمنحنى عند p_0 (نظامية) سيكون:
إما غير موجود أو يوجد عدد غير منته من المستويات الملاصقة (حالة إذا كان المنحنى مستقيماً أو مستوياً ملاصق وحيد ويتعين بـ $\vec{r}'(s)$ (متجه واحدة غير معدوم) و أول مشتق غير معدوم لـ $\vec{r}$ عند p_0 وغير مرتبط خطياً مع $\vec{r}'(s)$

[9] ليكن $\vec{r}(t) \longrightarrow t$ تمثيلاً وسيطياً للخم L وليس بالضرورة تمثيل طبيعي، و p_0 نقطة نظامية لـ L من التمثيل $\vec{r}$ موافقة لـ t_0 أي:

$$\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0} \quad , \quad \overrightarrow{op_0} = \vec{r}(t_0)$$

عندئذٍ:

$s \longrightarrow \vec{r}(t(s))$ هو التمثيل الطبيعي لـ L الناتج عن التمثيل $\vec{r}$،

ويبرهن بأن قيمة الوسيط الطبيعي المقابلة لـ p_0 أي:

$$\overrightarrow{op_0} = \vec{r}(t(s_0)) = \vec{r}(t_0)$$

وبما أن p_0 نظامية فإن:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

$$\vec{r}'(s_0) = \vec{r}'(t_0)\, t'(s_0)$$

$$\vec{r}'(t_0) = \vec{r}'(s_0)\, s'(t_0)$$

هذا الكلام صحيح عند النقاط النظامية.

ولدينا إذا كانت (p_0) نقطة نظامية في منحنٍ فإنه يوجد جوار للنقطة النظامية بحيث تكون جميع النقاط المنتمية في هذا الجوار نظامية.

وبالتالي نستطيع أن نكتب

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'(s)\, s'(t)$$

حيث t نقطة في جوار ما لـ t_0

نشتق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ t.

$$\vec{r}''(t) = \vec{r}''(s)\,(s'(t))^2 + \vec{r}'(s)\, s''(t)$$

وهذه المساواة صحيحة في جوار لـ t_0:

$$\vec{r}''(t_0) = \vec{r}''(s_0)\,(s'(t_0))^2 + \vec{r}'(s_0)\, s''(t_0)$$

$$\vec{r}'(t_0) \wedge \vec{r}''(t_0) = (\vec{r}'(s_0)\, s'(t_0)) \wedge (\vec{r}''(s_0)(s'(t_0))^2 + \vec{r}'(s_0)\, s''(t_0))$$

$$= (\vec{r}'(s_0)\, s'(t_0)) \wedge (\vec{r}''(s_0)\,(s'(t_0))^2) + \underbrace{(\vec{r}'(s_0)\, s'(t_0)) \wedge (\vec{r}'(s_0)\, s''(t_0))}_{=\vec{0}}$$

لأنهما متوازيان

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}'(t_0)\wedge\vec{r}''(t_0) = (s'(t_0))^3\left(\vec{r}'(s_0)\wedge\vec{r}''(s_0)\right)} \quad *$$

هذه المساواة تبين أن المتجهين $(\vec{r}'(t_0)\wedge\vec{r}''(t_0))$ و $(\vec{r}'(s_0)\wedge\vec{r}''(s_0))$ متوازيين وبالتالي فإن المماسين:

$\vec{r}'(t_0)\wedge\vec{r}''(t_0) \neq \vec{0} \iff \vec{r}'(s_0)\wedge\vec{r}''(s_0) \neq \vec{0}$ متوازيين لأن:

$(\Rightarrow)$ إن $\vec{r}'(t_0)\wedge\vec{r}''(t_0) \neq \vec{0}$ لأن: من المساواة *

$s'(t_0)^3 \neq 0$ لأن

$s'(t_0) = \|\vec{r}'(t_0)\| > 0$ (لأن p_0 نقطة منتظمة لـ $\vec{r}$)

و

$$t'(s_0) = \frac{1}{\|\vec{r}'(t_0)\|} > 0 \quad (2)$$

$(\Leftarrow)$ بفرض $\vec{r}'(s_0)\wedge\vec{r}''(s_0) \neq \vec{0}$ نرضاً.

كأن: $\vec{r}'(t_0)\wedge\vec{r}''(t_0) \neq \vec{0}$ لأن:

فإن * تكتب بالشكل:

$$\vec{r}'(s_0)\wedge\vec{r}''(s_0) = \underbrace{(t'(s_0))^3}_{\neq 0 \text{ من } (2)} \cdot \underbrace{(\vec{r}'(t_0)\wedge\vec{r}''(t_0))}_{\neq \vec{0} \text{ نرضاً}} \neq \vec{0}$$

لنفرض أن p_0 نقطة غير منتظمة. $\Leftarrow \vec{r}'(s_0) \neq \vec{0} \Leftarrow \vec{r}'(s_0)\wedge\vec{r}''(s_0) \neq \vec{0}$

لأن $\vec{r}'(s_0) \neq \vec{0}$ لأن النقطة p_0 نظامية. و الزاوية بين المتجهين $\vec{r}'(s_0)$ و $\vec{r}''(s_0)$ هي $\frac{\pi}{2}$

$\Leftarrow \vec{r}'(t_0)\wedge\vec{r}''(t_0) \neq \vec{0}$ (حسب النتائج السابقة)

$\Leftarrow \vec{r}'(t_0)\wedge\vec{r}''(t_0)$ يساعد المستوي الملاصق.

$\Leftarrow$ معادلة المستوي الملاصق في هذه الحالة ستكون:

$$(\vec{R} - \vec{r}(t_0)) \cdot (\vec{r}'(t_0)\wedge\vec{r}''(t_0)) = 0$$

أي

$$[\vec{R} - \vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)] = 0$$

وهي معادلة المستوي الملاصق للمنحني في النقطة p_0 نظامية وغير منتظمة

إذا كانت النقطة منتظمة فالمماس يكون من مرتبة أعلى من 1

المعادلة الديكارتية:

لتكن (x, y, z) إحداثيات نقطة ما من المستوي الملاصق.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} X - x(t_0) & Y - y(t_0) & Z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

هذه تمثل المعادلة الديكارتية للمستوي الملاصق للمنحني المتجه $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ عند نقطة نظامية وغير منعوتة منه p_0 موافقة لـ t_0.

المعادلات الوسيطية للمستوي الملاصق:

إن المعادلات الوسيطية لمستوي ملاصق تتبع لوسيطين λ, μ (أما المستقيم فيتبع لوسيط واحد) والتي $\vec{R}$ هو متجه موضع نقطة واقعة في المستوي الملاصق.

والمتجهات $\vec{R} - \vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)$ أيضاً واقعة في المستوي الملاصق فهي مرتبطة خطياً، وبالتالي جداء

$$\underset{\text{تتبع لـ } (\lambda, \mu)}{\vec{R} - \vec{r}(t_0)} = \lambda \vec{r}'(t_0) + \mu \vec{r}''(t_0)$$

هي المعادلة الشعاعية للمستوي الملاصق

ومن هذه المعادلة يمكننا استنتاج:

$$\begin{cases} X - x_0 = \lambda x'(t_0) + \mu x''(t_0) \\ Y - y_0 = \lambda y'(t_0) + \mu y''(t_0) \\ Z - z_0 = \lambda z'(t_0) + \mu z''(t_0) \end{cases}$$

وهي المعادلات الوسيطية للمستوي الملاصق للمنحني عند نقطة نظامية وغير منعوتة منه p_0 موافقة لـ t_0

تمرين صفحة 127 رقم (17):

أوجد معادلة المستوي الملاصق لكل من المنحنيات التالية: (في نقطة اختيارية منه)

1) $y = x$ ، $x = \frac{1}{2} z^2$ (معادلة ديكارتية للمنحني)

معادلة مستوي العارج تتوي المحور ox

الحل:
إن تقاطع المستوي $x=y$ مع المستقيم $x=\frac{1}{2}z^2$ سيعطينا منحني، ولإيجاد التمثيل لهذا المنحني:

$$x=y=\frac{1}{2}t^2 \quad \Leftarrow \quad z=t \quad \text{نفرض}$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t)=\left(\frac{1}{2}t^2,\ \frac{1}{2}t^2,\ t\right)\ ;\ t\in\mathbb{R}$$

م: التمثيل للمنحني المطلوب.

$$\vec{r}'(t)=(t,t,1)\neq\vec{0}\ ;\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

$\Leftarrow$ جميع نقاط المنحني نظامية.

$$\|\vec{r}'(t)\|=\sqrt{2t^2+1}$$

لا يمكن أن يكون هذا التمثيل طبيعي لأن: $\|\vec{r}'(t)\|=1$ متحققة في حالة واحدة عندما $t=0$

إيجاد معادلة المستقيم المماس عند نقطة p من المنحني موافقة لـ t

$$\vec{R}(u)=\vec{r}(t)+u\vec{r}'(t)=\left(\frac{1}{2}t^2,\frac{1}{2}t^2,t\right)+u(t,t,1)$$
$$=\left(\frac{1}{2}t^2+ut,\ \frac{1}{2}t^2+ut,\ t+u\right)$$

حيث أن جميع نقاط المنحني نظامية.
وهذه المعادلة تمثل لنا معادلة كل المماسات للمنحني السابقة في جميع نقاطه.

إيجاد معادلة المستوي الملاصق:

$$\vec{r}''(t)=(1,1,0)\neq\vec{0}$$

$\vec{r}'(t)\neq\vec{r}''(t)$ ، (لأنه لا يمكن كتابة أحدهما بدلالة الآخر)

$\Leftarrow$ جميع نقاط المنحني غير منتهية. ، ومنه معادلة المستوي الملاصق:

$$\begin{vmatrix} X-\frac{1}{2}t^2 & Y-\frac{1}{2}t^2 & Z-t \\ t & t & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

بالنشر ومنه المطلوب الآخر.

$$(1)\left[\left(y-\frac{1}{2}t^2\right)(1)-t(z-t)\right]-(1)\left[\left(x-\frac{1}{2}t^2\right)(1)-t(z-t)\right]=0$$

$$\Rightarrow y-x=0$$

ملاحظة:

عندما يطلب معادلة المستوي المماس أو ... (عند نقطة محددة) فلا نقوم بإيجاد المعادلة ثم التعويض بل أعوض بقيمة النقطة في البداية.

المستقيم العمودي للمنحنى في الصفحة 74 من الكتاب غير مطلوب