نمذجة رياضية

المحاضرة الثالثة

ث.ت 22/2/2015

4 نموذج تركيب الخلائط :

نعالج هذه المسألة على أساس اعتبارها مسألة تركيب أية خليطة (معدنية أو غذائية أو ...)

لنفرض أننا نريد أن نركّب خليطة من n مادة مناسبة.

وكلّ مادة تحتوي على m عنصر حيث واحدة المادة j تحتوي a_{ij} واحدة من العنصر i.

وسعر الوحدة الواحدة من المادة j يساوي C_j.

ونريد ألّا تقلّ كمّية العنصر i في الخليطة عن مقدار معيّن b_i، وأن تكون كلفة تلك الخليطة أصغر ما يمكن.

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي الذي يحقّق طلبات المسألة السابقة.

المواد / العناصر	A_1	A_2	------	A_n	المقدار الأدنى المطلوب
B_1	a_{11}	a_{12}	------	a_{1n}	b_1
B_2	a_{21}	a_{22}	------	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮	------	⋮	⋮
B_m	a_{m1}	a_{m2}	------	a_{mn}	b_m
السعر	C_1	C_2	------	C_n	

Scanned by CamScanner

تشكيل النموذج الرياضي:

نفرض $x_1, x_2, \dots, x_n$

الكميات المأخوذة من $A_1, A_2, \dots, A_n$ على الترتيب.

- إذا أخذنا الكمية x_1 من المادة A_1 فسيكون فيها $a_{11}x_1$ من العنصر B_1
وإذا أخذنا الكمية x_2 من المادة A_2 فسيكون فيها $a_{12}x_2$ من العنصر B_1
وهكذا... تكون الكمية التي سنحصل عليها من B_1 من كل المواد هي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

ونريد لهذه الكمية ألا تقل عن الكمية b_1 (حسب نص المسألة) أي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

وهكذا بنفس الطريقة نحصل على القيود.

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

- شروط عدم السلبية:

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = \overline{1, n}$$

- دالة الهدف: أن تكون الكلفة أصغرما يمكن

كلفة إنتاج x_1 من المادة A_1 هي c_1x_1

كلفة إنتاج x_2 من المادة A_2 هي c_2x_2

$$\vdots$$

كلفة إنتاج x_n من المادة A_n هي c_nx_n

أي أن دالة الهدف: $L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

Scanned by CamScanner

* وبالتالي النموذج الرياضي هو : أوجد القيمة الصغرى للتابع :

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots\dots + c_nx_n \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n \geqslant b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n \geqslant b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n \geqslant b_m$$
$$x_j \geqslant 0 \quad ; \quad j = \overline{1,n}$$

تمرين : (وظيفة لم تحلّ الدكتورة).

لنفرض أننا نريد تركيب وجبة غذائية من أربعة أنواع من المواد A_1, A_2, A_3, A_4 وأن سعر الوحدة الواحدة من كلّ منها c_1, c_2, c_3, c_4.

نفرض أنه يشترط أن تتضمن الوجبة مقداراً معيناً من كلّ من العناصر الغذائية الهامّة : البروتينات والكربونات والدهنيات.

على ألّا تقلّ كمية البروتين فيها عن b_1

وكمية الكربونات فيها عن b_2

وكمية الدهنيات فيها عن b_3

المطلوب : صياغة النموذج الرياضي اللازم لتحديد الكميات التي يجب إدخالها في الوجبة بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن، إذا علمت أن :

الوحدة الواحدة من المادة A_1 تحوي :

a_{11} بروتين ، a_{21} كربونات ، a_{31} دهنيات.

والوحدة الواحدة من المادة A_2 تحوي :

a_{12} بروتين ، a_{22} كربونات ، a_{32} دهنيات.

والوحدة الواحدة من المادة A_3 تحوي :

a_{13} بروتين ، a_{23} كربونات ، a_{33} دهنيات.

والوحدة الواحدة من المادة A_4 تحوي :

a_{14} بروتين ، a_{24} كربونات ، a_{34} دهنيات.

Scanned by CamScanner

الحل:

نفرض x_1, x_2, x_3, x_4 هي الكميات المأخوذة من المواد A_1, A_2, A_3, A_4 على الترتيب

- شرط البروتينات:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \geq b_1$$

- شرط الكربونات:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \geq b_2$$

- شرط الدهنيات:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq b_3$$

- شروط عدم السلبية:

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_3 \geq 0 \quad , \quad x_4 \geq 0$$

- دالة الهدف: الكلفة أصغر ما يمكن:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

* ومنه فالنموذج الرياضي: أوجد القيمة الصغرى للتابع:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \longrightarrow \text{Min}$$

ضمن الشروط:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \geq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \geq b_3$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$
$$x_4 \geq 0$$

Damistik دامستك

Scanned by CamScanner

/ /

5 نموذج خليط المنتجات :

ترغب شركة بتنظيم إنتاجها لثلاثة أنواع من التجهيزات الطبخية حيث أنّ ذلك يتطلب توفر اليد العاملة والمواد.
قدّم القسم المسؤول عن التنظيم المعلومات التالية :

	النوع		
	A	B	C
يد عاملة ساعة/للوحدة	7	3	6
مواد كغ/للوحدة	4	2	3
الربح ليرة/للوحدة	4	2	3

فإذا كانت المواد الخام محدّدة بـ 200 كغ يومياً
وساعات العمل محدّدة بـ 150 ساعة عمل يومياً

المطلوب: صياغة نموذج رياضي لتحديد من خلاله معدّل الإنتاج اليومي عن الأنواع الثلاثة بحيث يكون الربح أعظمياً.

الحل: نفرض x_1 ما ينتج من المنتج A.
x_2 ما ينتج من المنتج B.
x_3 ما ينتج من المنتج C.

- تابع الهدف: أن يكون الربح أعظمياً:

$$Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

Scanned by CamScanner

- شرط ساعات العمل :

$$7x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 150$$

- شرط المواد الخام :

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 200$$

- شروط عدم السلبية :

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

* ومنه فالنموذج الرياضي :

أوجد القيمة العظمى للتابع :

$$Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \longrightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط :

$$7x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 150$$
$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 200$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$

Scanned by CamScanner

6 مسألة اختيار وسيلة الإعلان:

ترغب شركة بتخطيط حملة إعلانية باستخدام ثلاثة وسائل مختلفة هي: التلفاز والإذاعة والمجلات.
تهدف هذه الحملة للوصول إلى أكبر عدد ممكن من الزبائن.
تعطي نتائج دراسة السوق الجدول التالي:

	التلفاز		الإذاعة	المجلات
	خلال النهار	الوقت الرئيسي		
كلفة الوحدة الإعلانية	40 000	75 000	30 000	15 000
عدد الزبائن المحتملين للوحدة الإعلانية	400 000	900 000	500 000	200 000
عدد الزبائن المحتملين للوحدة الإعلانية من الإناث	300 000	400 000	200 000	100 000

بفرض أن الشركة لا تريد إنفاق أكثر من 800 000 على الإعلان، وأنها ترغب بما يلي:

1) ألا يقل عدد الإناث عن 2 مليون.
2) أن تتعدد كلفة الإعلان في التلفاز بـ 500 000.
3) أن تشتري على الأقل ثلاث وحدات إعلانية في التلفاز خلال النهار، ووحدتين إعلانيتين خلال الوقت الرئيسي.
4) أن يتراوح عدد الوحدات الإعلانية عبر الإذاعة والمجلة بين 5 و 20 وحدات لكل منها.

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي الذي يحقق هدف الشركة.

Scanned by CamScanner

الحل: نفرض x_1 عدد الوحدات الإعلانية المشتراة في التلفاز خلال النهار.
x_2 عدد الوحدات الإعلانية المشتراة في التلفاز خلال الوقت الرئيسي.
x_3 عدد الوحدات الإعلانية المشتراة في الإذاعة.
x_4 عدد الوحدات الإعلانية المشتراة في المجلات.

- شرط الإنفاق: $40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 \leq 800$
- شرط الإناث: $300x_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100x_4 \geq 2000$
- شرط كلفة التلفاز: $40x_1 + 75x_2 \leq 500$
- ثلاث وحدات خلال النهار على الأقل: $x_1 \geq 3$
وحدتين خلال الوقت الرئيسي على الأقل: $x_2 \geq 2$
- شرط الإذاعة: $5 \leq x_3 \leq 10$
شرط المجلات: $5 \leq x_4 \leq 10$

{يجب لنا هنا ثلاثة أصفار من حدود الشروط الثلاثة الأولى، وذلك بتقسيم الطرفين على 1000}

* دالة الهدف: أكبر عدد ممكن من الزبائن:

$$Z = 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4$$

{وكذلك يجب لنا هنا حذف الأصفار الثلاثة من كل الحدود دون التأثير على الهدف}

ملاحظة: (يجب كتابتها في الفحص)
نلاحظ أن شرط عدم السلبية تتضمنه الشروط السابقة لذا لا داعي لكتابته.

* وبالتالي فالنموذج الرياضي: أوجد القيمة العظمى للتابع:

$$Z = 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4 \longrightarrow \text{Max}$$

ضمن الشروط:

$$40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 \leq 800$$
$$300x_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100x_4 \geq 2000$$
$$40x_1 + 75x_2 \leq 500$$
$$x_1 \geq 3 \quad , \quad x_2 \geq 2$$
$$5 \leq x_3 \leq 10$$
$$5 \leq x_4 \leq 10$$

Scanned by CamScanner