من المحاضرة السابقة:
d مسافة على الفضاء المتري X وأيضاً $\tilde{d}$ مسافة على الفضاء المتري X

حل الوظيفة من المحاضرة السابقة:
- لتكن S مجموعة كل المتتاليات المحدودة والغير المحدودة نعرف الدالة:

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$$

$$x=\{x_i\} \quad , \quad y=\{y_i\}$$

1) أثبت أن d متركاً على S
2) d متري غير مولد من نظيم

الحل: (1

أ) $\forall x,y\in S \; ; \; d(x,y)\geq 0$

ب) $\forall x,y\in S \; ; \; d(x,y)=0$

$$\Rightarrow d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}=0$$

البسط يساوي الصفر ومنه

$$|x_i-y_i|=0 \Rightarrow x_i-y_i=0 \Rightarrow x_i=y_i$$

$$\Rightarrow (x_1,x_2,\dots,x_i)=(y_1,y_2,\dots)$$

$$\Rightarrow x=y$$

ج) $\forall x,y \in S \quad , d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$

بما أنه بالقيمة المطلقة فيمكن أن نبدل بين الـx والـy فيصبح

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|y_i - x_i|}{1+|y_i - x_i|} = d(y,x)$$

د) $\forall x,y,z \in S \quad : d(x,z) \overset{?}{\leq} d(x,y) + d(y,z)$

لدينا $\underbrace{|x_i - z_i|}_{\alpha} = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq \underbrace{|x_i - y_i| + |y_i - z_i|}_{\beta}$

نقوم باستخدام هذه الخاصية:

$$0 < \alpha < \beta$$

نضيف $\alpha\beta$ للطرفين فيصبح $\alpha + \alpha\beta < \beta + \alpha\beta$

$$\alpha(1+\beta) < \beta(1+\alpha)$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}}$$

ومنه

$$\frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} \leq \frac{|x_i - y_i| + |y_i - z_i|}{1+|x_i - y_i| + |y_i - z_i|}$$

نفرق الكسر

$$\frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} \leq \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i| + |y_i - z_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{1+|x_i - y_i| + |y_i - z_i|}$$

$$1 + |x_i - y_i| + |y_i - z_i| > 1 + |x_i - y_i|$$

$$\frac{1}{1 + |x_i - y_i| + |y_i - z_i|} < \frac{1}{1 + |x_i - y_i|}$$

وأيضاً

$$\frac{1}{1 + |x_i - y_i| + |y_i - z_i|} < \frac{1}{1 + |y_i - z_i|}$$

ومنه

$$\frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} \leq \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{1 + |y_i - z_i|}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|y_i - z_i|}{1 + |y_i - z_i|}$$

وبالتالي

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

برهن (2) حسب المحاضرة السابقة نعلم أن:

إذا كان d مترياً مولداً من نظيم يجب أن

تتحقق الشرطين التاليين:

1) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$

2) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, d(x, y)$

نأخذ الشرط الثاني

$$l_1 = d(\alpha x, \alpha y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\alpha x_i - \alpha y_i|}{1 + |\alpha x_i - \alpha y_i|}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\alpha|\,|x_i - y_i|}{1 + |\alpha|\,|x_i - y_i|}$$

$$l_2 = |\alpha| \cdot d(x, y) = |\alpha| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

إذن $l_1 \neq l_2$

حل تمرين من الوظيفة في المحاضرة 3 كما طلبت (التمرين 3)

إذا كان لدينا $X = C[a,b]$ ، اثبات أن

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

تشكل دالة نظيم وهي غير مولدة من جداء داخلي

الحل: 1) إثبات أن $C[a,b]$ دالة نظيم

1') $\forall x \in C[a,b]$, $|x(t)| \geq 0$; $t \in [a,b]$

$$\Rightarrow \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \geq 0 \Longrightarrow \|x\| \geq 0$$

2') $\forall x \in C[a,b]$, $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow \max_{t \in [a,b]} |x(t)| = 0$

$$\Longleftrightarrow |x(t)| = 0 \;;\; t \in [a,b] \Longleftrightarrow \underset{t \in [a,b]}{x(t) = 0} \Longleftrightarrow x = 0_{C[a,b]}$$

الموضوع: التاريخ: / /

3') $\forall \alpha \in \mathbb{R} \,,\, \forall x \in C[a,b]$

$$\|\alpha x\| = \max_{t\in[a,b]} |\alpha x(t)|$$

$$= |\alpha| \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = |\alpha| \, \|x\|$$

4') $\forall x, y \in C[a,b] \;;\; \|x+y\| \overset{?}{\leq} \|x\| + \|y\|$

$$|(x+y)(t)| = |x(t)+y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)|$$

$$\boxed{\begin{aligned} |x(t)| &\leq \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \\ |y(t)| &\leq \max_{t\in[a,b]} |y(t)| \end{aligned}}$$

$$|(x+y)(t)| \leq \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |y(t)|$$

$$|(x+y)(t)| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\Rightarrow \max |(x+y)(t)| \leq \|x\| + \|y\|$$

$\max|(x+y)(t)|$ هو أكبر لـ $|(x+y)(t)|$ فهو بالتالي

أصغر من $\|x\| + \|y\|$ كون $t\in[a,b]$

ومنه $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

وبالتالي المتراجحة محققة

٢) حالة التنظيم غير مولدة من جداء داخلي:

لنأخذ فرضاً

$x(t)=\sin(t) \quad , y(t)=2 \quad , t\in[0,2\pi]$

لكي تكون مولدة من جداء داخلي يجب أن نحقق متطابقة متوازي الأضلاع:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2[\|x\|^2+\|y\|^2]$$

$$x(t)+y(t)=\sin t+2$$

$$\|x+y\|=\max_{t\in[a,b]}|\sin t+2|=3 \Rightarrow \|x+y\|^2=9 \quad \star$$

$$\|x-y\|=\max_{t\in[a,b]}|\sin t-2|=3 \Rightarrow \|x+y\|^2=9 \quad \star\star$$

في $\star$ أخذنا $t=\frac{\pi}{2}$ ومنه $\sin t=1$ وبالتالي القيمة العظمى للمقدار تكون 3

في $\star\star$ أخذنا $t=\frac{3\pi}{2}$ ومنه $\sin t=-1$ وبالتالي القيمة العظمى للمقدار هي -3 وبالقيمة المطلقة تكون 3 ولم نأخذ $t=\frac{\pi}{2}$ لأنه سيكون $\sin-2=-1$ و (1) ليست القيمة العظمى للمقدار

$$\|x\|=\max_{t\in[0,2\pi]}|\sin t|=1 \Rightarrow \|x\|^2=1$$

$$\|y\|=2 \Rightarrow \|y\|^2=4$$

ومنه $l_1 = 18$ ، $l_2 = 2[1+4] = 10$

$$l_1 \neq l_2$$

ومنه النظيم غير مولد بجداء داخلي

ملاحظة: أ) $\mathbb{R}^n$ فضاء جداء داخلي $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

ب) $\mathbb{R}^n$ فضاء منظم $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

جـ) $\mathbb{R}^n$ متري $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

تعاريف هامة في الفضاء المألوف $\mathbb{R}^n$:

1) الكرة المفتوحة:

$$N(x_0, \varepsilon) = \{ x : x \in \mathbb{R}^n , d(x, x_0) = \|x - x_0\| < \varepsilon \}$$

كرة مفتوحة مركزها x_0 ونصف قطرها ε

في $\mathbb{R}$ تمثل الكرة المفتوحة في المجال $]x_0 - \varepsilon , x_0 + \varepsilon[$

في $\mathbb{R}^2$ تمثل مجموعة النقاط الواقعة داخل الدائرة عدا المحيط

في $\mathbb{R}^3$ تمثل " " " داخل الكرة عدا المحيط

ج) الكرة المغلقة:

ندعو مجموعة النقاط:

$B(x_0, \varepsilon) = \{x : x \in \mathbb{R}^n , d(x, x_0) = \|x - x_0\| < \varepsilon\}$

في $\mathbb{R}$ تمثل مجال مغلق $[x_0 - \varepsilon , x_0 + \varepsilon]$

في $\mathbb{R}^2$ تمثل النقاط داخل الدائرة مع المحيط مجموعة الواقعة

في $\mathbb{R}^3$ " مجموعة النقاط الواقعة داخل الكرة مع المحيط

ملاحظة: إذن $N(x_0, \varepsilon) \subseteq B(x_0, \varepsilon)$ شرط لهما نفس القطر والمركز

3- جوار النقطة في $\mathbb{R}^n$: لتكن $x_0 \in \mathbb{R}^n$ نقول عن $U \subseteq \mathbb{R}^n$ إنه جوار لـ x_0 $\Longleftrightarrow$ x_0 مركز كرة مفتوحة محتواة في U

أي:

U جوار لـ x_0 $\Leftrightarrow \exists N(x_0, \varepsilon) \subseteq U$

4- المجموعة المفتوحة: لتكن $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ حيث M مجموعة غير خالية محتواة في $\mathbb{R}^n$ نقول عن المجموعة M بأنها مفتوحة إذا وجد لكل عنصر x_0 من M كرة مفتوحة مركزها x_0 محتواة في M

أي :

$\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ مفتوحة $\Leftrightarrow \forall x_0 \in M , \exists N(x_0,\varepsilon) \subseteq M$

تعريف ثاني للمجموعة المفتوحة : M مفتوحة $\Leftrightarrow M = M^\circ$

5- المجموعة المغلقة : لتكن $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ نقول عن المجموعة M بأنها مغلقة إذا كانت متممتها مجموعة مفتوحة

أي :

$\mathbb{R}^n \setminus M = M^c$ مفتوحة

ملاحظة : $\emptyset$ و $\mathbb{R}$ مجموعتان مغلقتان ومفتوحتان في آن واحد

6 - النقطة الداخلية : لتكن $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ نقول عن x_0 بأنها نقطة داخلية M إذا وجد جوار للنقطة x_0 محتوى في M

ونرمز لمجموعة النقاط الداخلية لـ M بالرمز M°

ملاحظة: داخل أي مجال هو مجال مفتوح حصراً

مثلاً $M = [1,2[\Rightarrow M^\circ =]1,2[$

انتهت المحاضرة