المحاضرة الأولى ٢٠١٥/٣/١٥

مراجعة: أي مجموعة غير خالية مزودة بقانون تشكيل واحد أو أكثر يسمى بنية جبرية

مفاهيم أساسية:

الجزء الأول: ١-١- الحلقات والحلقات الجزئية:

١-١-١- تعريف:

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل داخليين
الأول (+) ويسمى الجمع (ليس بالضرورة أن يكون الجمع المعروف)
الثاني (٠) ويسمى الضرب

ونقول عن البنية $(\mathbb{R},+,\cdot)$ أنها حلقة إذا تحققت الشروط:

الشرط الأول: $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبديلية.

الخاصة التجميعية $\star$ $a,b\in\mathbb{R}$ $\quad (a+b)+c=a+(b+c)$

العنصر المحايد $\star$ $a\in\mathbb{R}$ $\quad \exists e\in\mathbb{R}\ ;\ a+e=e+a=a$

نرمز e بـ 0 (ليس بالضرورة الصفر المعروف) ويسمى حيادي العملية الأولى (+) (ويسمى صفر الحلقة)

العنصر النظير $\star$ $a\in\mathbb{R}$ $\quad \exists -a\in\mathbb{R}\ ;\ a-a=0$

$a+a'=a'+a=e$ أو (يمكن كتابتها بهذا الشكل لأن الزمرة تبديلية)

التبديلية. $\star$ $a,b\in\mathbb{R}$ $\quad a+b=b+a$

الشرط الثاني $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ شبه زمرة.

حيث: $\mathbb{R}^*$ كل العناصر لـ $\mathbb{R}$ عدا حيادي $(\mathbb{R},+)$

$a,b,c\in\mathbb{R}:\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

شبه زمرة: مجموعة غير خالية مزودة بقانون تشكيل داخلي تجميعي

الشرط الثالث: $a,b,c\in\mathbb{R}$ $\quad a\cdot(b+c)=ab+ac$ (توزيع من اليمين)

$(b+c)\cdot a=ba+ca$ (توزيع من اليسار)

توزيع قانون التشكيل الثاني على الأول

/ /

الحلقة: هي زمرة تجميعية تبديلية مزودة بعملية ضرب تجميعية وتوزيعية على الجمع من اليمين واليسار ونرمز لها بـ $(R,+,\cdot)$

ملاحظة:

1- اذا كان في R عنصر مثل e حيث $e\in R$ تحقق:

$a\in R$: $e\cdot a=a\cdot e=a$.

عندئذ يسمى e بالحيادي (حيادي الحلقة R) (حيادي عنصر بالنسبة للتشكيل الثاني $(\cdot)$)

في مثل هذه الحالة R حلقة واحدية (ذات عنصر محايد)

ونرمز له بـ 1 (ليس بالضرورة 1 المعروف)

2- اذا تحقق الشرط التالي:

$a,b\in R$: $a\cdot b=b\cdot a$

تسمى الحلقة تبديلية (هذا الخصوص خاص بتشكيلة الثاني لا الأول لان الأولى تحقق زمرة)

لتكن F مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل داخليين $(+,\cdot)$

تعريف 2:

نقول عن الحلقة $(F,+,\cdot)$ حقل اذا وفقط اذا:

1) $(F,+,\cdot)$ حلقة تبديلية

2) $(F^*,\cdot)$ زمرة تبديلية ؟

حيث F^* كامل F عدا الحيادي في الزمرة $(F,+)$

3) $(\cdot)$ توزيعي على الجمع

الحقل هو حلقة واحدية تبديلية كل عنصر مغاير للصفر له مقلوب

1-1-2: أمثلة:

1- أشهر حلقة هي: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ إن مجموعة الأعداد الصحيحة المزودة بالجمع والضرب المألوف على الأعداد تشكل حلقة تبديلية واحدية.

2- $(M_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ مجموعة كل المصفوفات المربعة ذات الرتبة $n\times n$ المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ والمزودة بقانون جمع وضرب المصفوفات تشكل حلقة واحدية ليست تبديلية

هي المصفوفة الواحدية

3- $(4\mathbb{Z},+,\cdot)$ هي مجموعة من مضاعفات ∓ 4

$$\{0, \mp 4, \mp 8, \mp 12, \dots\}$$

المزودة بقانوني الجمع والطرح المألوفين على الأعداد تشكل حلقة تبديلية ولكن ليست واحدية.

4- $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$: جمع وضرب بالمقاس n

5- نعرف المجموعة.

$$\mathbb{Z}(\sqrt{p}) = \{a+b\sqrt{p} \;:\; a,b\in \mathbb{Z}\}$$

من أجل p عدد أولي (عدد ثابت) ونعرف عليها قانوني تشكيل

$x = a_1 + b_1\sqrt{p}$ $\quad x, y \in \mathbb{Z}(\sqrt{p})$

$y = a_2 + b_2\sqrt{p}$

$$x \oplus y = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\sqrt{p}$$

$$x \odot y = (a_1 + b_1\sqrt{p})\cdot(a_2 + b_2\sqrt{p})$$

$$= (a_1a_2 + b_1b_2\,p) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{p}$$

المجموعة غير خالية تحوي على الأقل 1

عندئذ تشكل $(\mathbb{Z}(p),+,\cdot)$

حلقة واحدية تبديلية الحايد فيها 1 $\quad 1 = 1 + 0\sqrt{p}$.

أمثلة الحقول:

1 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ إن مجموعة الأعداد النسبية المزودة بقانوني الجمع والضرب المألوفين على الأعداد تشكل حقل.

2 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ حقل $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ حقل.

3 $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) = \{a + b\sqrt{p} : a, b \in \mathbb{Q}\}$

$(\mathbb{Q}(\sqrt{p}), +, \cdot)$ حقل.

مبرهنة 1-1-3:

لتكن R حلقة و $a, b, c \in R$ عندئذٍ القضايا التالية صحيحة:

1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

الإثبات $a \cdot 0 = a(0+0) \rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ حسب التوزيع

$a \cdot 0 - a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0$ نضيف $(-a \cdot 0)$ إلى كلا الطرفين

$0 = a \cdot 0$

2) $a(-b) = (-a)b = -a \cdot b$

3) $(-a)(-b) = a \cdot b$

4) $a(b-c) = ab - ac$

مبرهنة 1-1-4:

إذا كانت R حلقة و $a, a_1, a_2, \ldots, a_n, b, b_1, b_2, \ldots, b_m \in R$

فإن القضايا التالية صحيحة:

1) $a \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{i=1}^{m} a b_i$

$a \sum_{i=1}^{m} b_i = a(b + b_1 + b_2 + \cdots + b_m) = (ab + ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_m) = \sum_{i=1}^{m} ab_i$

لأنها حلقة يمكن توزيع الضرب على الجمع

2) $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) b = \sum_{i=1}^{m} a_i b$

3) $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j$

مبرهنة 1-1-5.

إذا كانت R حلقة و $a,b \in \mathbb{R}$ فإن القضايا التالية صحيحة:

1) $(ma)b = a(mb) = m(ab)$ $m \in \mathbb{Z}$

2) $m,n \in \mathbb{Z}$ $(ma)(nb) = mn(ab)$

3) $m,n \in \mathbb{Z}^+$: $a^m . a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{m.n}$

تعريف 1-1-6:

لتكن $\mathbb{R}$ حلقة واحدية نقول عن العنصر $0 \neq a \in \mathbb{R}$ إنه قابل للقلب إذا وفقط إذا:

$\exists b \in R : a.b = 1 = b.a$ [إذا كان قابلاً للقلب من اليمين واليسار آن واحد]

نرمز له بالرمز $b = a^{-1}$ ونرمز لمجموعة كل العناصر القابلة للقلب في R بـ $\mathcal{U}(\mathbb{R})$

أمثلة:

$\star\ \mathcal{U}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ $\star\ \mathcal{U}(\mathbb{Z}_6) = \{1,5\}$ حلقة $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$

1-1-7 نتيجة

لتكن R حلقة إن القضايا التالية صحيحة: (R ليست الحلقة الصفرية)

1- إذا كانت R واحدية فإن $(\mathcal{U}(R),\cdot)$ زمرة

2- إذا تحقق $a^2 = a$ $a \in \mathbb{R}$ R حلقة تبديلية (Boolean Ring)

الإثبات:

1- لأن 1 عنصر قابل للقلب $\mathcal{U}(\mathbb{R}) \neq \phi \to 1 \in \mathcal{U}(\mathbb{R})$ ليست مجموعة خالية

التجميعية $a,b,c \in \mathcal{U}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ $(a.b).c = a(b.c)$

$a\in U(\mathbb{R})$ $\quad 1.a = a.1 = a$ وجود الحيادي لـ(.)

الحيادي 1 في $U(\mathbb{R})$

العنصر النظير $\quad a\in U(\mathbb{R}) \to \exists b\in U(\mathbb{R})$

$a,b\in U(\mathbb{R})$ $\quad \exists c.d\in \mathbb{R}$

$a.c = c.a = bd = db = 1$

ومنه $(a.b)$ قابل للقلب من اليسار $\quad (a.b).d.c = a(bd)c = a.c = 1$

قابل للقلب من اليمين $\quad (dc)(ab) = d(ca)b = db = 1$

ومنه $\quad ab\in U(\mathbb{R})$

---

2) $a,b\in\mathbb{R}$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

(العملية غير تبديلية) $\quad = a^2 + ba + a.b + b^2$

$\to a+b = a + ba + ab + b$

$\to ab = -ba$

لنبرهن أن $\quad \forall c\in\mathbb{R} \quad \boxed{c=-c}$

وفق $\quad c+c = (c+c)^2 = (c+c)(c+c)$

$c+c = c^2+c^2+c^2+c^2$

$\to c = -c$

من أجل $\quad c = b.a$

$ab = -c = c = ba$

ومنه $\mathbb{R}$ تبديلية

تمارين:

★ بين أياً من البنى التالية تشكل حلقة تبديلية ، واحدية ، وأياً منها تشكل حقل

1) $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$

2) $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$

3) $(2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +, \cdot)$

4) $(\mathbb{Z}(\sqrt{2}), +, \cdot)$

5) $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}, +, \cdot)$

★ أوجد العناصر القابلة للقلب لكل من الحلقات التالية.

1) $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes)$

2) $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus, \otimes)$

3) $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +, \cdot)$

4) $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}, +, \cdot)$
