المحاضرة الرابعة

٢٢/٣/٢٠١٥م

الفصل الثاني: الحلقات الصحيحة (التكاملية) ومميز الحلقة:

Characteristic of Integral Domains of Ring

2-1. الحلقات التكاملية:

2-1-1 تعريف:

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة و $0 \neq a \in R$ نقول أن:

*1 a قاسم للصفر من اليمين في R إذا وفقط إذا:

تحقق: $\exists\, 0 \neq b \in R \ : \ b.a=0$

*2 a قاسم للصفر من اليسار في R إذا وفقط إذا:

تحقق: $\exists\, 0 \neq b \in R \ ; \ a.b=0$

*3 a قاسم للصفر إذا وفقط إذا:

$\exists\, 0 \neq b, b' \in R \ ; \ a.b=b'.a=0$

ملاحظة:
لو كانت الحلقة تبديلية لا داعي للتمييز بين قاسم من اليمين واليسار

ليس بالضرورة أن يكون القاسم من اليمين = القاسم من اليسار.
حتى يكون a قاسم الصفر
بل يكفي أن a قاسم من اليمين واليسار بآن واحد.

أمثلة:

$(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ حلقة

$$x=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

x قاسم للصفر لأن:

1) $\exists\, 0 \neq y \in \mathbb{R} \ ; \ y.x=0$ $\qquad y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

«x قاسم للصفر من اليمين»

2) $\exists\, 0 \neq Z \in \mathbb{R}. \ ; \ x.Z=0$ $\qquad Z=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

«x قاسم للصفر من اليسار»

ومنه فإن x هو قاسم للصفر

$\mathbb{R}=(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$ $\{2,4,3\}$ قواسم صفرية صحيحا لأن،

$$2.3=3.2=0$$

$$4.3=3.4=0$$

2-1-2 تعريف:

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة تبديلية واحدية نقول أن R منطقة تكاملية (صحيحة) إذا وفقط إذا كانت خالية (خالية من القواسم الصفرية)

أمثلة:

1) $\mathbb{R}=(\mathbb{Z},+,\cdot)$

منطقة تكاملية لأنها تحقق $a.b=0$ (إما $a=0$ أو $b=0$)

2) $\mathbb{R}=(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$

ليست منطقة تكاملية لأنها تحوي قواسم صفرية

3) $\mathbb{R}=(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$

منطقة تكاملية

ملاحظة:

$R=(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ إذا كان n = زوجي ليست منطقة تكاملية

إذا كانت n = أولي منطقة تكاملية.

---

4) $\mathbb{R}=(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ حيث p عدد أولي فإن R حلقة واحدية تبديلية منطقة تكاملية

البرهان:

ليكن $a.b=0$ $a,b\in\mathbb{R}$

ولنثبت أن (a أو $b=0$ فتكون قواسم غير صفرية أي منطقة تكاملية)

حسب إقليدس $\rightarrow p \mid a.b$

(عدد أولي يقسم عددين إما يقسم الأول أو الثاني)

ومنه أو $b=0$ إما $\rightarrow a=0$

تكون $\mathbb{R}$ خالية من قواسم الصفر فهي Id

مبرهنة: 3.1_2

لتكن $(\mathbb{R},+,.)$ حلقة و $a,b,c \in \mathbb{R}$ ان القضيتين التاليتين متكافئتين:

1* $\mathbb{R}$ خالية من قواسم الصفر (منطقة تكاملية)

2* الحذف من اليسار $ab=ac \quad \wedge a \neq 0 \longrightarrow b=c$ $\longleftarrow \boxed{a(b-c)=0}$

$b.a=c.a \quad \wedge a \neq 0 \longrightarrow b=c$ $\longleftarrow \boxed{(b-c)a=0}$

الإثبات:

2 ← 1: نفرض $\mathbb{R}$ خالية من قواسم الصفر:

$$ab=ac \longrightarrow a(b-c)=0 \xrightarrow[Id]{a\neq 0} b-c=0 \longrightarrow b=c$$

لا داعي للقول أن الحلقة تبديلية أو واحدية

$$b.a=c.a \longrightarrow (b-c)a=0 \xrightarrow[Id]{a\neq 0} b-c=0 \longrightarrow b=c$$

1 ← 2: نفرض أن قانون الاختصار محقق ونثبت أنها خالية من قواسم الصفر

$x.y=0$ و $x,y \in \mathbb{R}$

إذا كان $x=0$ تم المطلوب

إذا كان $x\neq 0$ ← نثبت أن $y=0$

$$x.y=x.0=0 \xrightarrow{x\neq 0} y=0$$

كل حقل هو منطقة تكاملية والعكس ليس بالضرورة صحيح

مثال: $\mathbb{Z}$

مبرهنة: 4_1_2

كل منطقة تكاملية منتهية هي حقل

الإثبات:

لتكن $(\mathbb{R},+,.)$ منطقة تكاملية حسب تعريف المنطقة التكاملية $\mathbb{R}$ حلقة واحدية تبديلية

ليتم المطلوب لنبرهن أن كل عنصر مغاير للصفر في $\mathbb{R}$ له مقلوب في $\mathbb{R}$ $\quad 0\neq a \in \mathbb{R}$

لنعرف الدالة: $E: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\forall r \in \mathbb{R} : E(r)=a.r$$

1* تغيير:

$r_1, r_2 \in R$ ؛ $r_1 = r_2 \xrightarrow{a \neq 0} ar_1 = ar_2 \longrightarrow E(r_1) = E(r_2)$

2* متباين:

$E(r_1) = E(r_2) \longrightarrow ar_1 = ar_2 \xrightarrow[Id]{a \neq 0} r_1 = r_2$

3* غامر:

عدا أنه R منتهية فيكون غامر وبالتالي E تقابل.

[redacted] $1 \in R$ (المنتز)

$\exists x \in R$ ؛ $E(x) = 1$

(R تبديلية) $a.x = x.a = 1$ (ومنه حسب تعريف العنصر القابل للقلب)

وبالتالي R حقل.

$(\mathbb{Z}_p, +, .)$ p عدد أولي $\mathbb{Z}_p$ منطقة تكاملية فهي حقل (حسب مبرهنة سابقة)

مثال: $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_5$ كلها حقول.

2-2 مميز الحلقة: أي الحلقة [illegible]

مثال في $\mathbb{Z}_4$ [illegible] $1+1+1+1 = 0$ [illegible]

[illegible] $n.0$ [illegible]

2-2-1: تعريف:

لتكن $(R, +, .)$ حلقة يعرف مميز الحلقة على أنه أصغر عدد صحيح موجب يحقق:

$\forall 0 \neq r \in R \quad n.r = 0$

ملاحظة: في حال عدم وجود مثل هذا العدد $\boxed{n}$ فإن مميز الحلقة يكون 0 إصطلاحاً

- ونرمز لمميز الحلقة بالرمز $Char(R) = n$

أمثلة:

1) إذا كانت $R(\mathbb{Z}, +, .)$ $Char(R) = 0$.

/ /

2) $\mathbb{R}=(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ $Char(\mathbb{R})=n$ $\forall r\in\mathbb{R} \Rightarrow nr=0$

2_2_1 مبرهنة:

لتكن $\mathbb{R}$ حلقة واحدية $Char(\mathbb{R})=n$ إن القضايا التالية متكافئة:

1) $n>0$

2) n: أصغر عدد موجب يحقق $1.n=0$

الإثبات:

1 ← 2: نفرض $n>0$ ← ولنثبت n أصغر عدد موجب يحقق $r.n=0$ $\forall r\in\mathbb{R}$

ولنأخذ $1.n=0$ $1\in\mathbb{R}$

ليتم المطلوب:

نفرض جدلاً أن ~~ ~~ $\exists\, 0<m<n$

حقق $1.m=0$

$\forall r\in\mathbb{R}$ $r.m=(r.1)m=r(1.m)=r.0=0$

وهذا يناقض تعريف مميز الحلقة كون n هو المميز

ومنه الفرض الجدلي خاطئ ← أي: n أصغر عدد صحيح موجب يحقق شرط المميز

2 ← 1 (واضح)

2_2_2 مبرهنة هامة:

إن مميز المنطقة التكاملية إما عدد أولي أو صفر

الإثبات:

لتكن $(R,+,.)$ منطقة تكاملية و $Char(R)=n$

إذا $n=0$ تم المطلوب

$n\neq 0$ نفرض جدلاً غير أولية n

وبالتالي $\exists s,t\in\mathbb{Z}.$

$n=t.s$ $1<s<n$ $1<t<n$

حسب مبرهنة سابقة.

$$0 = 1.n = 1.(st) = (1.s)t = (1.s)(1.t) = 0$$

Id. $\mathbb{R}$ لأن   إما $\Rightarrow (1.s)=0$

أو $\Rightarrow (1.t)=0$

وهذا يناقض كون n: أصغر عدد صحيح موجب تحقق $1.n=0$.

وبالتالي الفرضية الجبرية خاطئة ← n أولي.

2-2-3 مبرهنة.

لتكن R منطقة تكاملية إن القضايا التالية صحيحة.

1) $char(\mathbb{R})=0$ يوجد في $\mathbb{R}$ حلقة جزئية تماثل $\mathbb{Z}$

2) $char(\mathbb{R})=p$ يوجد في $\mathbb{R}$ حلقة جزئية تماثل $\mathbb{Z}_p$ حيث p: عدد أولي.

الإثبات.

1) نعرف المجموعة $E=\{m.1_R : m\in \mathbb{Z}\}$

نعرف التطبيق $\varepsilon: \mathbb{Z} \longrightarrow E$

$$\varepsilon(r)=r.1_R$$

1) تطبيق

$$r_1, r_2 \in \mathbb{Z} ,\ r_1=r_2 \longrightarrow r_1.1_R \overset{1_R\neq 0}{=} r_2.1_R \longrightarrow \varepsilon(r_1)=\varepsilon(r_2)$$

2) تباين.

$$\varepsilon(r_1)=\varepsilon(r_2) \longrightarrow r_1 1_R = r_2 1_R \xrightarrow[Id]{1_R\neq 0} r_1=r_2$$

3) ε تشاكل حلقي.

$r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ 1) $\varepsilon(r_1+r_2)=(r_1+r_2)1_R$ حسب التوزيع لعملية الجمع

$$= \underbrace{1+1+\dots+1}_{(r_1+r_2)\text{ مرة}} = \underbrace{1+\dots}_{r_1}\underbrace{\dots+1}_{r_2} = \varepsilon(r_1)+\varepsilon(r_2)$$

2) $\longrightarrow \varepsilon(r_1 r_2) = (r_1 r_2).1_R$

$(r_1 \cdot 1)(r_2 \cdot 1) = \varepsilon(r_1) \cdot \varepsilon(r_2)$

4) غامر

$\forall x \in E \; : x = m \cdot 1_R = m \in \mathbb{Z}$

$\to \exists m \in \mathbb{Z} \; ; \varepsilon(m) = x$

مما سبق ε تماثل

5) على الطالب.

مبرهنة 2-2-4:

لتكن R حقل

اذا كان $Char(R) = 0$ فانه يوجد في R حقل جزئي يماثل $\mathbb{Q}$

اذا كان $Char(R) = p$ يوجد في R حقل جزئي يماثل $\mathbb{Z}_p$
