نظرية الفئات

المحاضرة الثانية

١٧/٣/٢٠١٥م

المونومورفيزم - الإيبومورفيزم :

تعريف: لتكن $\mathcal{C}$ فئة ، و $u : A \longrightarrow B$ مورفيزم للفئة $\mathcal{C}$ (أي $u \in \mathcal{C}(A,B)$). عندئذٍ :

* نقول عن u إنه مونومورفيزم إذا حقق الشرط :

أياً كان $X \in ob(\mathcal{C})$ فإن التطبيق :

$$\alpha : \mathcal{C}(X,A) \longrightarrow \mathcal{C}(X,B)$$

المعرف بالشكل :

$$\forall f \in \mathcal{C}(X,A) : \alpha(f) = u.f$$

هو عبارة عن تطبيق متباين.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] & B \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "u.f"'] &
\end{tikzcd}$$

* نقول عن u إنه إيبومورفيزم إذا حقق الشرط :

أياً كان $X \in ob(\mathcal{C})$ فإن التطبيق :

$$\beta : \mathcal{C}(B,X) \longrightarrow \mathcal{C}(A,X)$$

المعرف بالشكل :

$$\forall g \in \mathcal{C}(B,X) : \beta(g) = g.u$$

هو عبارة عن تطبيق متباين.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "g.u"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

* ونقول عن المورفيزم u إنه إيزومورفيزم إذا وجد مورفيزم $v : B \longrightarrow A$ يحقق :

$$u.v = I_B \quad , \quad v.u = I_A$$

ملاحظة هامة :

إذا أخذنا فئة المجموعات كحالة خاصة يكون لدينا :

- المونومورفيزمات في فئة المجموعات هي عبارة عن التطبيقات المتباينة وإنّ مفهوم المونومورفيزم فعلياً هو تعميم لمفهوم التطبيق المتباين

- الإيبومورفيزمات في فئة المجموعات هي عبارة عن التطبيقات الغامرة. وإنّ مفهوم الإيبومورفيزم فعلياً هو تعميم لمفهوم التطبيق الغامر.

- الإيزومورفيزمات في فئة المجموعات هي عبارة عن التطبيقات التقابل. وإنّ مفهوم الإيزومورفيزم فعلياً هو تعميم لمفهوم التطبيق التقابل.

مبرهنة:

لتكن $\mathscr{Y}$ فئة، عندئذٍ :

1) تركيب مونومورفيزمين هو مونومورفيزم.

2) إذا كان $u, v \in Mor(\mathscr{Y})$ وكان $u.v$ مونومورفيزم عندئذٍ v مونومورفيزم

3) المورفيزم المطابق هو مونومورفيزم.

الإثبات:

لنفرض أن : $v : A \longrightarrow B \quad , \quad u : B \longrightarrow D$

عندئذٍ: $u.v : A \longrightarrow D$

وليكن $X \in ob(\mathscr{Y})$ ولنأخذ التطبيقات:

* $\alpha : \mathscr{Y}(X, A) \longrightarrow \mathscr{Y}(X, B)$

المعرف بالشكل: $\alpha(f) = v.f$

* $\beta : \mathscr{Y}(X, B) \longrightarrow \mathscr{Y}(X, D)$

المعرف بالشكل: $\beta(g) = u.g$

* $\gamma : \mathscr{Y}(X, A) \longrightarrow \mathscr{Y}(X, D)$

$\gamma(\lambda) = (u.v).\lambda$

1) لنفرض أن كلاً من v , u مونوسورفيزم، عندئذٍ حسب التعريف يكون كل من α , β متباين:
ولنبرهن أن التطبيق γ متباين.
- من أجل أي عنصرين: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{Y}(X, A)$
لنفرض أن: $\gamma(\lambda_1) = \gamma(\lambda_2)$
أي أن: $(u.v).\lambda_1 = (u.v).\lambda_2$
ولكن الضرب تجميعي $\Leftarrow$ $u.(v.\lambda_1) = u.(v.\lambda_2)$ $\boxed{\star}$

لدينا: $v.\lambda_1 , v.\lambda_2 : X \longrightarrow B \in \mathcal{Y}(X, B)$
منطلق β وبالتالي يمكن أخذ صورتها وفق β.
ومنه فإن:
$$\begin{cases} \beta(v.\lambda_1) = u.(v.\lambda_1) \\ \beta(v.\lambda_2) = u.(v.\lambda_2) \end{cases}$$
$$\overset{\boxed{\star}}{\Longrightarrow} \beta(v.\lambda_1) = \beta(v.\lambda_2)$$
ولكن β متباين $\Leftarrow$ $v.\lambda_1 = v.\lambda_2$ $\boxed{\star\star}$
نأخذ الآن صورة λ_1, λ_2 وفق التطبيق α:
$$\begin{cases} \alpha(\lambda_1) = v.\lambda_1 \\ \alpha(\lambda_2) = v.\lambda_2 \end{cases}$$
$$\overset{\boxed{\star\star}}{\Longrightarrow} \alpha(\lambda_1) = \alpha(\lambda_2)$$
ولكن α متباين $\Leftarrow$ $\lambda_1 = \lambda_2$
وبالتالي γ متباين والمورفيزم $u.v$ مونوسورفيزم، وهو المطلوب.

2) لنفرض أن المورفيزم $u.v$ مونوسورفيزم عندئذٍ حسب التعريف فإن γ متباين
ولنبرهن أن التطبيق α متباين
- ليكن: $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{Y}(X, A)$
لنفرض أن: $\alpha(\mu_1) = \alpha(\mu_2)$
أي أن: $v.\mu_1 = v.\mu_2$

نضرب الطرفين بـ u من اليسار:

$$u\cdot(v\cdot m_1) = u\cdot(v\cdot m_2)$$

ولكن الضرب تجميعي $\Leftarrow$ $(u\cdot v)\cdot m_1 = (u\cdot v)\cdot m_2$

ومنه حسب تعريف γ: $\gamma(m_1) = \gamma(m_2)$

وبالتالي كون γ متباين: $m_1 = m_2$

ومنه التطبيق α متباين، والمورفيزم v هو مونومورفيزم.

③ ليكن $c \in ob(\mathcal{C})$، ولنأخذ المورفيزم المطابق:

$$I_c : C \longrightarrow C$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "I_c\cdot f"'] & C \arrow[d, "I_c"] \\ & C \end{tikzcd}$$

أياً كان $X \in ob(\mathcal{C})$ لنأخذ التطبيق:

$$\delta : \mathcal{C}(X,C) \longrightarrow \mathcal{C}(X,C)$$

المعرف بالشكل: $\delta(f) = I_c\cdot f$

حتى يكون I_c مونومورفيزم يجب أن يكون δ متبايناً.

- ليكن $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{C}(X,C)$ بحيث:

$$\delta(\alpha_1) = \delta(\alpha_2)$$
$$I_c\cdot\alpha_1 = I_c\cdot\alpha_2$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

(حسب تعريف المورفيزم المطابق)

ومنه δ متباين $\Leftarrow$ المورفيزم المطابق I_c هو عبارة عن مونومورفيزم.

مبرهنة: (على نمط المبرهنة السابقة).

لتكن $\mathcal{C}$ فئة، عندئذٍ:

1) تركيب إيبومورفيزمين هو إيبومورفيزم.
2) إذا كان $u, v \in Mor(\mathcal{C})$ وكان $u\cdot v$ إيبومورفيزماً فإن u إيبومورفيزم.
3) المورفيزم المطابق هو عبارة عن إيبومورفيزم.

البرهان:

لنفرض أن: $v: A \longrightarrow B$, $u: B \longrightarrow D$

عندئذٍ: $u.v: A \longrightarrow D$

ولنأخذ التطبيقات:

* $\alpha: \mathcal{Y}(B,X) \longrightarrow \mathcal{Y}(A,X)$

المعرف بالشكل: $\alpha(f) = f.v$

* $\beta: \mathcal{Y}(D,X) \longrightarrow \mathcal{Y}(B,X)$

المعرف بالشكل: $\beta(g) = g.u$

* $\gamma: \mathcal{Y}(D,X) \longrightarrow \mathcal{Y}(A,X)$

$\gamma(\lambda) = \lambda.(u.v)$

وذلك أياً كان $X \in ob(\mathcal{Y})$.

1) لنفرض أن كلاً من u, v إيبومورفيزم

عندئذٍ يكون كل من التطبيقين α, β متباين.

ولنبرهن أن التطبيق γ متباين.

- ليكن $\forall \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{Y}(D,X)$

لنفرض أن: $\gamma(\tau_1) = \gamma(\tau_2)$

$\tau_1.(u.v) = \tau_2.(u.v)$

الضرب تجميعي $\Leftarrow$ $\boxed{*}\ (\tau_1.u).v = (\tau_2.u).v$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right] & D \arrow[r, "\tau_1, \tau_2"] & X \end{tikzcd}$$

وبما أن $\tau_1.u, \tau_2.u \in \mathcal{Y}(B,X)$ فإن:

$$\begin{cases} \alpha(\tau_1.u) = (\tau_1.u).v \\ \alpha(\tau_2.u) = (\tau_2.u).v \end{cases}$$

$$\overset{\boxed{*}}{\Longrightarrow} \alpha(\tau_1.u) = \alpha(\tau_2.u)$$

وبما أن α متباين نجد: $\boxed{**}\ \tau_1.u = \tau_2.u$

نأخذ الآن صورة τ_1, τ_2 وفق β:

$$\begin{cases} \beta(\tau_1) = \tau_1.u \\ \beta(\tau_2) = \tau_2.u \end{cases}$$

$\overset{(**)}{\Longrightarrow} \quad \beta(\tau_1) = \beta(\tau_2)$

ولكن β متباين فيكون : $\tau_1 = \tau_2$

ومنه لامتباين والمورفيزم $u.v$ إيبومورفيزم .

② لنفرض أن $u.v$ إيبومورفيزم ، عندئذٍ يكون التطبيق لا متبايناً ، ولنبرهن أن التطبيق β متباين .

- ليكن : $\forall\, \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{Y}(D,X)$

ولنفرض أن : $\beta(\theta_1) = \beta(\theta_2)$

فيكون حسب تعريف β : $\theta_1 . u = \theta_2 . u$

نضرب الطرفين من اليمين بـ v : $(\theta_1 . u) . v = (\theta_2 . u) . v$

ولكن الضرب تجميعي : $\theta_1 . (u.v) = \theta_2 . (u.v)$

$A \xrightarrow{u.v} D \xrightarrow{\theta_1, \theta_2} X$

حسب تعريف لا يكون : $\gamma(\theta_1) = \gamma(\theta_2)$

وكون لامتباين نجد : $\theta_1 = \theta_2$

$\Leftarrow$ β متباين والمورفيزم u إيبومورفيزم .

③ ليكن $C \in ob(\mathcal{Y})$ ، ولنأخذ المورفيزم المطابق :

$I_c : C \longrightarrow C$

$$\begin{tikzcd} X & \\ C \arrow[u, "g"] & C \arrow[l, "I_c"] \arrow[ul, "g.I_c"'] \end{tikzcd}$$

أياً كان $X \in ob(\mathcal{Y})$ لنأخذ التطبيق :

$\delta : \mathcal{Y}(C,X) \longrightarrow \mathcal{Y}(C,X)$

المعرف بالشكل : $\delta(g) = g . I_c$

حتى يكون I_c إيبومورفيزماً يجب أن يكون δ متبايناً .

- ليكن $v_1, v_2 \in \mathcal{Y}(C,X)$ بحيث $\delta(v_1) = \delta(v_2)$

$v_1 . I_c = v_2 . I_c$

$\Longrightarrow v_1 = v_2$

(لأن المورفيزم المطابق يلعب دور الحيادي) .

ومنه δ متباين $\Leftarrow$ المورفيزم المطابق I_c هو عبارة عن إيبومورفيزم .

مبرهنة:

لتكن $\mathcal{C}$ فئة، عندئذٍ:

1- تركيب إيزومورفيزمين هو إيزومورفيزم.

2- المورفيزم المطابق هو إيزومورفيزم.

الإثبات:

لتكن: $u: A \longrightarrow B \quad , \quad v: B \longrightarrow D$

مورفيزمان للفئة $\mathcal{C}$.

1- لنفرض أن كلّ من u , v إيزومورفيزم، عندئذٍ يوجد:

$$u_1: B \longrightarrow A \quad , \quad v_1: D \longrightarrow B$$

بحيث:

$$u.u_1 = I_B \quad , \quad u_1.u = I_A$$
$$v.v_1 = I_D \quad , \quad v_1.v = I_B$$

ويكون لدينا: $u_1.v_1 : D \longrightarrow A \in \mathcal{C}(D, A)$

ولدينا أيضاً: $v.u : A \longrightarrow D \in \mathcal{C}(A, D)$

عندئذٍ يمكن أن نكتب:

$$(v.u).(u_1.v_1) = v.(u.u_1).v_1 = v.I_B.v_1 = v.v_1 = I_D$$
$$(u_1.v_1).(v.u) = u_1.(v_1.v).u = u_1.I_B.u = u_1.u = I_A$$

ومنه استطعنا إيجاد مورفيزم $u_1.v_1$ يحقق تعريف الإيزومورفيزم، ومنه فإن المورفيزم $v.u$ إيزومورفيزم.

2- ليكن $A \in ob(\mathcal{C})$ والمورفيزم المطابق $I_A: A \longrightarrow A$

عندئذٍ يوجد $I'_A : A \longrightarrow A$

يحقق أن:

$$I_A . I'_A = I_A \quad , \quad I'_A . I_A = I_A$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "I_A"] & A \\ A \arrow[u, "I_A"] \arrow[ur, "I_A . I_A"'] & \end{tikzcd}$$

ومنه فإن المورفيزم المطابق I_A هو إيزومورفيزم.

مبرهنة:
في أية فئة $\mathcal{C}$: كل إيزومورفيزم هو مونومورفيزم وإيبومورفيزم.

الإثبات:
لتكن $\mathcal{C}$ فئة ، ولتكن $u : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}(A,B)$
ولنفرض أن u إيزومورفيزم.
عندئذٍ يوجد مورفيزم : $v : B \longrightarrow A$
بحيث :
$$u . v = I_B$$
$$v . u = I_A$$
وبما أن المورفيزم المطابق I_A هو مونومورفيزم ، نجد من العلاقة الثانية أن u مونومورفيزم (حسب المبرهنة الأولى)
وبما أن المورفيزم المطابق I_B هو إيبومورفيزم ، نجد من العلاقة الأولى أن u إيبومورفيزم (حسب المبرهنة الثانية)
وهو المطلوب.

ملاحظة: إنّ عكس المبرهنة السابقة غير صحيح في الحالة العامة
أي إذا كان المورفيزم u مونومورفيزم وإيبومورفيزم بنفس الوقت
فليس بالضرورة أن يكون u إيزومورفيزماً.
- أما في الحالة الخاصة عندما نأخذ فئة المجموعات ، فإن عكس المبرهنة محقق دوماً حيث أنه إذا كان التطبيق متبايناً وغامراً فإنه سيكون تقابل.

نتيجة: في أية فئة : المورفيزم المطابق وحيد (من أجل كل شيء).

الإثبات: لتكن $\mathcal{C}$ فئة ، ولتكن $A \in ob(\mathcal{C})$.
ولنفرض وجود :
$$I_A : A \longrightarrow A$$
$$I'_A : A \longrightarrow A$$
كل منهما مورفيزم مطابق في $\mathcal{C}$ ولنأخذ تركيبهما :
$$I_A = I_A . I'_A = I'_A$$ وهو المطلوب.

/ /

نتيجة: لتكن $\mathcal{C}$ فئة، و $u: A \longrightarrow B \in \mathcal{C}(A,B)$
إذا كان u إيزومورفيزماً، عندئذٍ يوجد في $\mathcal{C}$ مورفيزم وحيد:
$v: B \longrightarrow A$
يحقق: $u.v = I_B$, $v.u = I_A$

الإثبات: لنفرض أنه يوجد: $v, w : B \longrightarrow A$
يحققان: $w.u = I_A$, $v.u = I_A$
$u.w = I_B$, $u.v = I_B$

$$v = I_A . v = (w.u).v = w.(u.v) = w.I_B = w$$

وهو المطلوب.

انتهت المحاضرة الثانية