(المحاضرة الرابعة)

* النقطة الحدية (مركز تجمع) نقطة تراكم: نقول عن $x_0 \in R^n$ إنها نقطة حدية للمجموعة $\emptyset \neq M \subseteq R^n$ إذا كان تقاطع أي جوار (محذوف) لـ x_0 (بدون المركز) مع المجموعة M غير خالي أي:

$$\forall N(x_0,\varepsilon),\quad N(x_0,\varepsilon) \cap (M-\{x_0\}) \neq \emptyset$$

ويطلق على مجموعة كل النقاط الحدية لـ M بالملمس باسم المجموعة المشتقة ونرمز لها بـ M' أو $D(M)$

* النقطة المحيطية: نقول عن $x_0 \in R^n$ إنها نقطة محيطية للمجموعة $\emptyset \neq M \subseteq R^n$ إذا كان تقاطع أي جوار لـ x_0 مع M ومع متممة M لا يساوي الخالية أي

$$\forall u = U(x_0),\quad u \cap M \neq \emptyset,\quad u \cap R^n \setminus \{M\} \neq \emptyset$$

$$U \cap M^c \neq \emptyset$$

ونرمز لمجموعة النقاط المحيطية بالرمز ∂M

نتيجة: بالفضاء المتري الحقيقي المألوف يكون طرفا المجال من أي نوع عبارة عن نقاط محيطية بالنسبة له

$$\left]\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right[\cap \left]1,3\right[\neq \emptyset$$

أطراف المجال هي نقاط محيطية

النقطة الملاصقة: نقول عن $x_0 \in R^n$ إنها نقطة ملاصقة للمجموعة $\emptyset \neq M \subseteq R^n$ إذا كان تقاطع أي جوار للنقطة x_0 مع M لا يساوي الخالي

أي:
$$\forall u = U(x_0),\quad u \cap M \neq \emptyset$$

ونسمي مجموعة النقاط الملاصقة لـ M بالمجموعة الملاصقة ونرمز لها بـ $\overline{M}$

ملاحظة: كل نقطة تجمع هي نقطة ملاصقة، وغير ملاصقة غير تجمع
بعض نقط التصانيف لا يأتي أمثلة

النقطة المنعزلة: نقول عن x_0 من R^n إنها نقطة منعزلة للمجموعة $M \subseteq R^n$
إذا وجد جوار للنقطة x_0 بحيث

$\exists\, U = \underset{\text{جوار}}{U(x_0)}$ ، $U \cap M = \{x_0\}$

$M = [0,1[\cup [2]$

منعزلة

أي جوار للـ 2 لازم إذا تقاطع مع 2 لازم يعطيني 2

المجموعة المحدودة: نقول عن المجموعة الجزئية $M \subseteq R^n$ إنها محدودة
في R^n إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي
إذا وجدت كرة مفتوحة تحوي M $\quad M \subseteq N(x,r)$

المتتاليات في الفضاء المألوف R^n:
المتتالية هي دالة منطلقها N ومستقرها R^n

$$f: N \to R^n$$
$$m \mapsto f(m) = x_m \in R^n$$

$X_m = (X_{1m}, X_{2m}, \dots X_{nm})$ ، $X_1 = (X_{11}, X_{21}, X_{31}, \dots X_{n1})$

باستغراق الترقيم

نلاحظ أننا حصلنا من المتتالية $\{X_m\}_{m\in N}$ على n متتاليات حقيقية العناصر.

تعريف تقارب المتتالية في R^n: نقول عن المتتالية $\{X_m\}$ إنها متقاربة في R^n
من العنصر $x \in R^n$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي

$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists n_\varepsilon \in N \,,\ m \geq n_\varepsilon \Rightarrow \| x_m - x \| < \varepsilon$

أي: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{im} - x_i)^2} < \varepsilon$

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي كي تتقارب $\{X_m\}_{m \in N}$ في R^n إلى $x \in R^n$ هو أن تتقارب $\{x_{im}\}$ من x_i $(i=1,\dots,n)$

كل وحدة من عناصر المتتالية y_i

أي $x_{1m} \xrightarrow{ش} x_{11}$ ، $x_{2m} \xrightarrow{ش} x_{21}$ ، .....

$\xLeftarrow{لزوم}$

الإثبات: لنفرض أن $\{X_m\}$ متقارب في x

$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists N_\varepsilon \in N \,,\ m \geq N_\varepsilon \Rightarrow \| X_m - X \| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{im} - X_i)^2} < \varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_{im} - X_i)^2 < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow (X_{1m} - X_1)^2 + (X_{2m} - X_2)^2 + \dots + (X_{nm} - X_n)^2 < \varepsilon^2$$

$$(X_{im} - X_i)^2 < \sum_{i=1}^{n} (X_{im} - X_n)^2 < \varepsilon^2 \qquad (i=1,\dots,n)$$

$$\Rightarrow |X_{im} - X_i| < \| X_m - X \| < \varepsilon \qquad (i=1,\dots,n)$$

$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists n_{i\varepsilon} \in N \,,\ m \geq n_{i\varepsilon} \,,\ |x_{im} - x_i| < \varepsilon$

$$\Rightarrow X_{im} \xrightarrow[m \to \infty]{} X_i \qquad (i=1,\dots,n)$$

$\Longrightarrow$ لنفرض أن $X_{im} \xrightarrow[m \to \infty]{} X_i$ $(i=1,\dots,n)$

$\forall \varepsilon > 0 ,\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0 ,\ \exists\, n_{1\varepsilon} \in N ,\ m \geq n_{1\varepsilon}$

$\Longrightarrow |x_{1m} - x_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \qquad \Longrightarrow |x_{im} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$

$|x_{2m} - x_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$\ldots\ldots |x_{nm} - x_n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$(x_{1m} - x_1)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n} ,\ (x_{2m} - x_2)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n} ,\ \ldots (x_{nm} - x_n)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$

$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_{im} - x_i)^2 < \underset{\text{ن مرة}}{n} \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2$

$\Longrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{im} - x_i)^2} < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 ,\ \exists\, n_\varepsilon = \max\{n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon}, \ldots, n_{n\varepsilon}\} \in N$

$m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \| X_m - X \| < \varepsilon$

أي $\{X_m\}_{m \in N}$ متقاربة من $x \in \mathbb{R}^n$

نتائج من دون برهان:

1) إذا وجدت نهاية المتتالية فهي وحيدة.

2) كل متتالية متقاربة في $\mathbb{R}^n$ تكون محدودة

3) لتكن $\{X_m\}_{m \in N}$ متقاربة في X في $\mathbb{R}^n$ و $\{Y_m\}_{m \in N}$ متقاربة في Y في $\mathbb{R}^n$

$\{X_m \mp Y_m\} \xrightarrow[m \to \infty]{} X \mp Y$

4) الشرط اللازم والكافي في تكون المتتالية X_m متقاربة من X من $\mathbb{R}^n$ هو أن تحوي أي جوار من X جميع عناصر المتتالية باستثناء عدد منتهي منها

٥) الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة $M \subset R^n$ مغلقة
هو أن يكون لكل متتالية متقاربة في M نهاية في M

المتتالية الجزئية في R^n: لتكن $\{X_m\}_{m \in N}$ متتالية في R^n ولتكن $\{m_i\}$ متتالية في مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث
$m_1 < m_2 < m_3 < \dots$
عندئذ نسمي $\{X_{m_k}\}$ متتالية جزئية من المتتالية $\{X_m\}$

كيفية بناء متتالية جزئية من متتالية معطاة: نقوم باختيار عنصر من المتتالية الأصلية ونضعه أول عنصر في المتتالية الجديدة بحيث نهمل جميع العناصر الواقعة قبله ثم نأخذ عنصر آخر من المتتالية الأصلية ونضع عنصر ثاني في المتتالية الجديدة بحيث نهمل العناصر قبله وهكذا نحصل على المتتالية الجزئية $\{X_{m_k}\}$ من المتتالية $\{X_m\}$

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي كي تكون المتتالية الأصلية $\{X_m\} \to X$ من X هو أن تكون المتتالية الجزئية متقاربة من X (نفس النهاية)
أي

$$\{X_m\}_{m \in N} \xrightarrow[m \to \infty]{} X \iff \{X_{m_k}\} \xrightarrow[m \to \infty]{} X$$

إذا كان لدينا متتاليتين جزئيتين متقاربتين من نهايتين مختلفتين فالأصلية متباعدة حتماً