المحاضرة الرابعة

١٧ / ٣ / ٢٠١٥

ب- بعض التوزيعات المستمرة المشهورة:

١- التوزيع المستمر المنتظم

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; \ a \le x \le b \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \ , \ Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

مثال: ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته الاحتمالية

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/3 & ; \ 1 \le x \le 4 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب: أ- عين توقع X وتباينه

ب- عين دالة التوزيع المجمع $F(x)$.

ج- احسب الاحتمالات $p(X<3)$ ، $p(0<X<2)$ و $p(X>2)$

د- عين الدالة المولدة للعزوم.

الحل: أ- نلاحظ أن لـ X التوزيع المنتظم المستمر على المجال [1,4] ومنه $a=1$, $b=4$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(4-1)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0.75$$

ب-

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & b \le x \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ \frac{x-1}{3} & a < x < b \\ 1 & 4 \le x \end{cases}$$

ج- (لأن التوزيع مستمر)

$$p(X<3) = p(X \le 3) = F(3)$$

$$= \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$p(0<X<2) = p(X\le 2) - p(X\le 0)$$
$$= F(2) - F(0) = \frac{2-1}{3} - 0 = 1/3$$
$$p(X>2) = 1 - p(X\le 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{2-1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} = \frac{e^{4t} - e^{t}}{3t} \quad \forall t \in R$$

٢- التوزيع الأسي: (ثاني توزيع من التوزيعات المستمرة)

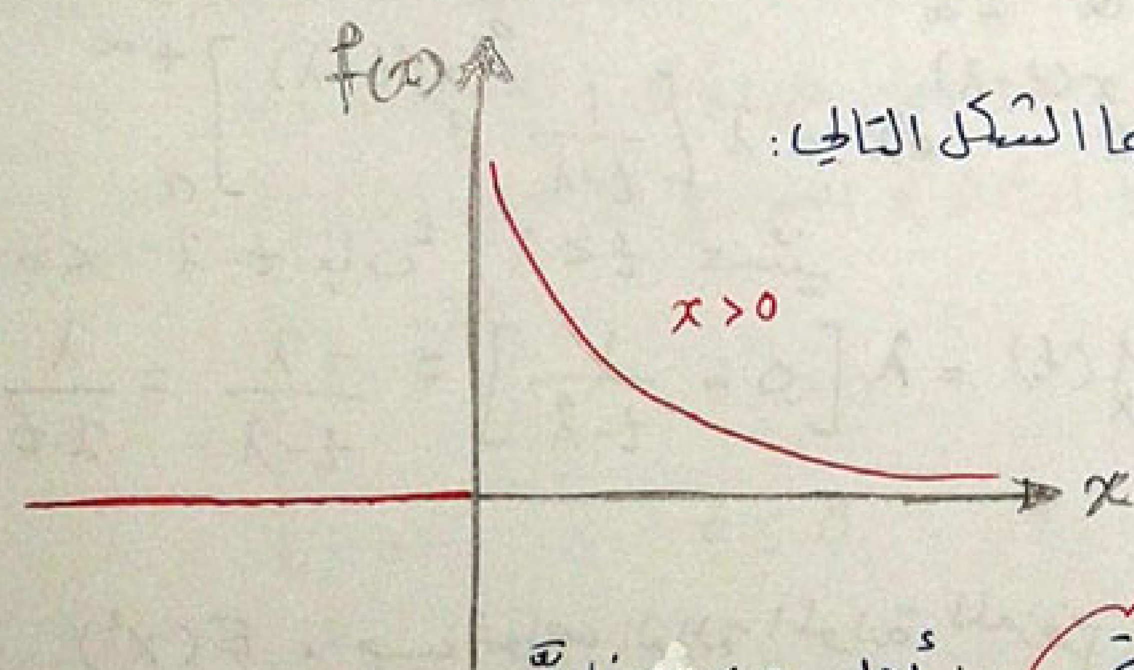
تعريف: نقول إنّ للمتغير العشوائي X التوزيع الأسي بالوسيط λ ($\lambda>0$) إذا كان لـ X الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; \quad x>0 \\ 0 & ; \quad x\le 0 \end{cases}$$

ملاحظات: $f_X(x)$ تحقق الشرطين:

1. $f_X(x) \ge 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.
2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$
$$= 0 + \lambda\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \lambda\left[0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\right] = \lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1$$

دالة الكثافة لها الشكل التالي:



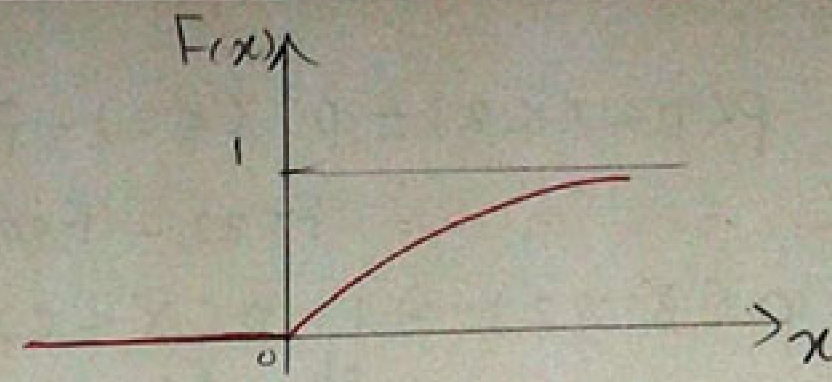
دالة التوزيع المجمع: من أجل $x \le 0$ فإنّ

$$F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} (0)\cdot dt = 0$$

من أجل $x>0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \lambda\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^{x}$$
$$= \lambda\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\right] = -e^{-\lambda x} + 1$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & ; x>0\\ 0 & ; x\le 0\end{cases}$$



- مميزات المتغير الذي يتبع التوزيع الأسي:

1- التوقع:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0} x(0)\,dx+\int_{0}^{+\infty} x\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

تكامل بالتجزئة:

نفرض $u=x$ و $dv=e^{-\lambda x}dx$ وبالتالي $\begin{cases}du=dx\\ v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{cases}$

$$\Rightarrow E(X)=\lambda\left[\left[-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}dx\right]$$

$$E(X)=\lambda\left[0+\frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}\right]=\lambda\left[\frac{1}{\lambda}\left(0-\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\right)\right]=\frac{1}{\lambda}$$

2- الدالة المولدة للعزوم:

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}f_X(x)\,dx=\int_0^{+\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=\lambda\int_0^{+\infty} e^{x(t-\lambda)}dx=\lambda\left[\frac{1}{t-\lambda}e^{x(t-\lambda)}\right]_0^{+\infty}$$

وإذا كان $t-\lambda<0$ بأن $t<\lambda$ عندئذ

$$M_X(t)=\lambda\left[0-\frac{1}{t-\lambda}\right]=\frac{-\lambda}{t-\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda-t}\quad ; \; t<\lambda$$

3- التباين:

لنوجد أولاً $E(X^2)$ ، حسب خواص الدالة المولدة للعزوم

$$E(X^k)=\left(M_X(t)\right)^{k}\Big|_{t=0}$$

$$M'_X(t)=\frac{0-(-\lambda)}{(\lambda-t)^2}=\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}$$

وبالتالي:

$$E(X) = M'_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{\lambda}{(\lambda-0)^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$M''_X(t) = \frac{0 - 2(\lambda-t)(-1)(\lambda)}{(\lambda-t)^4} = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = M''_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{2\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

وكما يمكننا حساب $E(X^2)$ من العلاقة

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

حيث نكامله بالتجزئة مرتين.

* تمرين: إذا كان عمر مصباح كهربائي بالساعات له الكثافة الاحتمالية

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10000} \cdot e^{-\frac{1}{10000}x} & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

أ- أوجد دالة التوزيع لـ X . ب- أوجد العمر الوسطي للمصباح

ج- أوجد احتمال أن يعمر المصباح على الأقل 8000 ساعة.

الحل: نلاحظ أن لـ X التوزيع الأسي بالوسيط $\lambda = \frac{1}{10000}$

أ-

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & ; \ t > 0 \\ 0 & ; \ t \leq 0 \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{10000}t} & ; \ t > 0 \\ 0 & ; \ t \leq 0 \end{cases}$$

ب-

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{10000}} = 10000 \text{ ساعة}$$

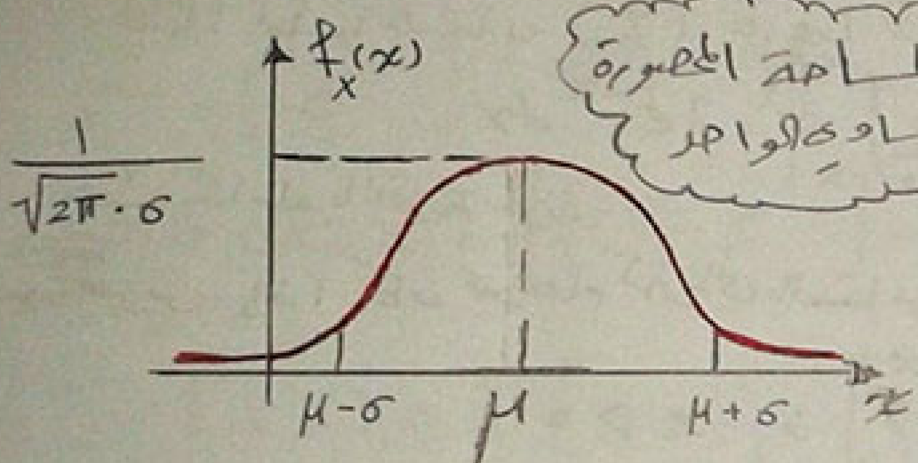
ع -
$$P(X > 8000) = 1 - P(X \le 8000)$$
$$P(X > 8000) = 1 - F(8000)$$ (لأن التوزيع مستمر)
$$P(X > 8000) = 1 - (1 - e^{-0.8}) = e^{-0.8} \approx 0.499$$

٣- التوزيع الطبيعي (المستمر)

نقول عن متغير عشوائي X إنه له توزيعاً طبيعياً بالوسيطين μ و σ^2 إذا كانت له دالة الكثافة التالية:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; \quad \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ 0 < \sigma < +\infty \,,\, -\infty < \mu < +\infty \end{cases}$$

ملاحظة: التباين $\sigma^2 = Var(X)$ و $\mu = E(X)$ و الانحراف $\sigma = \sqrt{Var(X)}$



خواص كثافة التوزيع الطبيعي:

١- تبلغ قيمتها العظمى عندما $x = \mu$ وتساوي هذه القيمة $\left(1/\sqrt{2\pi}\cdot\sigma\right)$

2- المنحني البياني متناظر بالنسبة للمستقيم $x = \mu$

3- عندما $x \to \mp\infty$ فإن $f_X(x) \to 0$

4- النقطتان اللتان فاصلتهما $x = \mu \pm \sigma$ هما نقطتا انعطاف

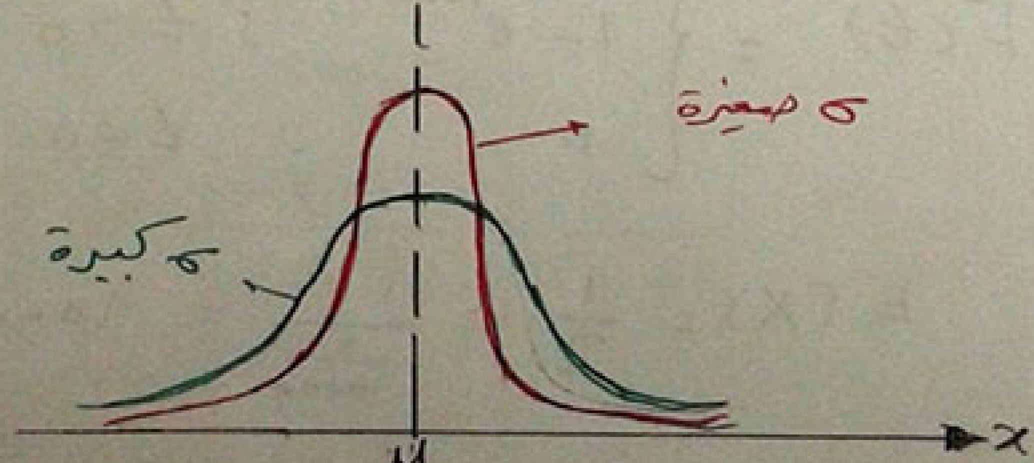
5- المنحني له شكل الجرس .

6- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ و $f(x) \ge 0$ أي أن المساحة المحصورة بين المنحني و المحور الأفقي ox تساوي (1).

7- $E(X) = \mu$ & $Var(X) = \sigma^2$ والانحراف $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

8- إن كل متغير في قيمة μ يعطي إزاحة للمنحني على المحور ox .

9- كلما صغرت σ كلما ارتفعت ذروة المنحني و يصبح التوزيع أقل انتشاراً حول المتوسط μ . وكلما كبرت σ كلما انخفضت ذروة المنحني و يصبح التوزيع أكثر انتشاراً حول المتوسط μ.



انتهت المحاضرة الرابعة