نمذجة رياضية

المحاضرة الرابعة

٢٣/٣/٢٠١٥م

7 نموذج النقل :

في هذه المسائل يكون دائماً تابع الهدف من الشكل L (أقل تكلفة أو أقل زمن)
يتناول هذا النموذج مسألة إيجاد التوزيع المثالي لوسائل النقل كالحافلات والطائرات والسفن على الخطوط المفروضة بحيث تلبي طلباتها بأقل كلفة ممكنة أو أقل زمن ممكن.

- وسائل النقل
  - أقل كلفة
  - أقل زمن
    - النموذج المغلق (الإنتاج = الاستهلاك)
    - النموذج المفتوح
      - فائض في الإنتاج
      - عجز في الإنتاج

صيغة النموذج العام :

لنفرض أنه لدينا n نوع من وسائل النقل .
وأن العدد المتوفر من النوع j هو N_j .
ونريد توزيعها على m خطاً "مستقلاً"، حيث أن حجم الطلب على الخط i هو A_i واحدة نقل
وطاقة (حمولة) النوع j على الخط i تساوي a_{ij} واحدة نقل في واحدة الزمن
وأن مقدار نفقاتها على ذلك الخط يساوي C_{ij} وحدة نقدية .

نوضح ما سبق من خلال الجدول التالي :

الخطوط \ الأنواع	1	2	----	j	---	n	حجم الطلب
1	a_{11} x_{11} c_{11}	a_{12} x_{12} c_{12}	----	a_{1j} x_{1j} c_{1j}	---	a_{1n} x_{1n} c_{1n}	A_1
2	a_{21} x_{21} c_{21}	a_{22} x_{22} c_{22}	----	a_{2j} x_{2j} c_{2j}	---	a_{2n} x_{2n} c_{2n}	A_2
⋮	⋮	⋮	---	⋮	⋮	⋮	⋮
i	a_{i1} x_{i1} c_{i1}	a_{i2} x_{i2} c_{i2}	----	a_{ij} x_{ij} c_{ij}	---	a_{in} x_{in} c_{in}	A_i
⋮	⋮	⋮	---	⋮	⋮	⋮	⋮
m	a_{m1} x_{m1} c_{m1}	a_{m2} x_{m2} c_{m2}	----	a_{mj} x_{mj} c_{mj}	---	a_{mn} x_{mn} c_{mn}	A_m
عدد النوع	N_1	N_2	----	N_j	---	N_n	

المطلوب: إيجاد النموذج الرياضي في هذه المسألة بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن

تشكيل النموذج الرياضي:

نفرض x_{ij} عدد وسائل النقل على الخط i من النوع j

حيث: $i=\overline{1,m}$

$j=\overline{1,n}$

- شروط الطلب :

عدد الركاب المنقولين على الخط i في الوسيلة j : $a_{ij}\, x_{ij}$

وبالتالي عدد الركاب المنقولين على الخط i في جميع الوسائل:

$$a_{i1}x_{i1} + a_{i2}x_{i2} + \text{------} + a_{in}x_{in} \geqslant A_i \quad ; \; i = \overline{1,m}$$

(نضع $\geqslant$ لاستيعاب أي طارئ).

- شروط النوع :

$$x_{11} + x_{21} + \text{------} + x_{m1} = N_1$$

$$\vdots$$

$$x_{1j} + x_{2j} + \text{------} + x_{mj} = N_j \quad ; \; j = \overline{1,n}$$

- بالإضافة إلى شروط عدم السلبية لأن x_{ij} تعبر عن عدد وسائل النقل.

- تابع الهدف : أقل كلفة ممكنة :

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

* ومنه فالنموذج الرياضي : أوجد القيمة الصغرى للتابع :

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \longrightarrow Min$$

ضمن الشروط.

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \text{------} + a_{1n}x_{1n} \geqslant A_1$$

$$a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \text{------} + a_{2n}x_{2n} \geqslant A_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \text{------} + a_{mn}x_{mn} \geqslant A_m$$

$$x_{11} + x_{21} + \text{----} + x_{m1} = N_1$$

$$x_{12} + x_{22} + \text{----} + x_{m2} = N_2$$

$$\vdots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \text{------} + x_{mn} = N_n$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m} \;,\; j = \overline{1,n}$$

Scanned by CamScanner

تطبيق: (وظيفة لم تحلها الدكتورة)

لتكن لدينا ثلاثة أنواع من الطائرات 1 و 2 و 3 .
عددها على التوالي 50 , 20 , 30 .
ونريد توزيعها على أربعة خطوط جوية متطلباتها على التوالي:
300 , 200 , 1000 , 500
أما الحمولة الشهرية والنفقات لكل نوع وعلى كل خط موضحة بالجدول التالي:

الخطوط \ الأنواع	1	2	3	حجم الطلب
1	15 x_{11} 15	30 x_{12} 70	25 x_{13} 40	300
2	10 x_{21} 20	25 x_{22} 15	50 x_{23} 70	200
3	20 x_{31} 25	10 x_{32} 15	30 x_{33} 40	1000
4	50 x_{41} 40	17 x_{42} 45	45 x_{43} 65	500
عدد النوع	50	20	30	

المطلوب: صياغة نموذج رياضي بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن.

الحل: أوجد القيمة الصغرى للتابع:

$$L = 15x_{11} + 70x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 15x_{22} + 70x_{23} + 25x_{31} + 15x_{32} + 40x_{33} + 40x_{41} + 45x_{42} + 65x_{43} \longrightarrow Min$$

/ /

ضمن الشروط :

$$15x_{11} + 30x_{12} + 25x_{13} \geq 300$$
$$10x_{21} + 25x_{22} + 50x_{23} \geq 200$$
$$20x_{31} + 10x_{32} + 30x_{33} \geq 1000$$
$$50x_{41} + 17x_{42} + 45x_{43} \geq 500$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 50$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 20$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 30$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = \overline{1,4} \quad , \quad j = \overline{1,3}$$

---

1 نموذج نقل المواد بأقل تكلفة :

لنفرض أننا نريد نقل إحدى المواد من مراكز الإنتاج إلى مراكز الاستهلاك ولنفرض أنه لدينا m مركزاً للإنتاج وأن المادة المفروضة متوفرة فيه بكميات محددة تساوي $a_1, a_2, \dots, a_m$

كما نفرض أنه لدينا n مركزاً للاستهلاك وأن كلاً منها يحتاج إلى كميات معينة من تلك المادة تساوي : $b_1, b_2, \dots, b_n$

نفرض أن تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المركز الإنتاجي i إلى المركز الاستهلاكي j تساوي C_{ij} .

المطلوب : صياغة نموذج رياضي بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن .

* في هذه المسألة نميز حالتين :

الحالة الأولى : نسميها النموذج المغلق وفيها يكون : $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

الحالة الثانية : نسميها النموذج المفتوح وفيه يكون : $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$

(قد يأتي في الامتحان سؤال تحديد نوع النموذج : مفتوح أو مغلق) .

الحالة الأولى: (نموذج مغلق).

نفرض x_{ij} الكمية المنقولة من المركز الإنتاجي i إلى المركز الاستهلاكي j.

- دالة الهدف: أقل كلفة نقل ممكنة:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow Min$$

	1	2	------	n	
1	x_{11}	x_{12}	------	x_{1n}	a_1
2	x_{21}	x_{22}	------	x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	----	⋮	⋮
m	x_{m1}	x_{m2}	------	x_{mn}	a_m
	b_1	b_2	----	b_n	

- شروط الكميات المتوفرة:

$$x_{11} + x_{12} + \text{------} + x_{1n} = a_1$$
$$\vdots$$
$$x_{m1} + x_{m2} + \text{------} + x_{mn} = a_m$$

- شروط الكميات المطلوبة:

$$x_{11} + x_{21} + \text{------} + x_{m1} = b_1$$
$$\vdots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \text{------} + x_{mn} = b_n$$

- شروط عدم السلبية:

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad ; \quad i = \overline{1,m} \quad , \quad j = \overline{1,n}$$

* ومنه فالنموذج الرياضي: ------

انتهت المحاضرة الرابعة