المحاضرة التاسعة ٢٣/٨ ٢٠١٥م

لتكن R حقل إن القضايا التالية صحيحة:

1) $Char(R)=0$ فإنه يوجد حقل جزئي مماثل $\mathbb{Q}$

2) $Char(R)=p$ فإنه يوجد حقل جزئي مماثل $\mathbb{Z}_p$ حيث p عدد أولي.

الإثبات:

1) نعرف المجموعة $E=\left\{\frac{m.1_R}{n.1_R} ; m,n\in\mathbb{Z} ; n\neq 0\right\}$

نفرض $Char(R)=0$ ولنثبت أنه يوجد حقل جزئي مماثل $\mathbb{Q}$

إن E غير خالية وذلك لأن $1_R.n\in R$ و $1_R.n\in Z(R)$

نعرف العلاقة $\varepsilon:\mathbb{Q}\longrightarrow E$

$$\forall \frac{m}{n}\in\mathbb{Q} : \varepsilon\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m.1_R}{n.1_R}$$

1) التطبيق:

$$\forall \frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2}\in\mathbb{Q}$$

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}\longrightarrow\frac{m_1.1_R}{n_1.1_R}=\frac{m_2.1_R}{n_2.1_R}\longrightarrow\varepsilon\left(\frac{m_1}{n_1}\right)=\varepsilon\left(\frac{m_2}{n_2}\right)$$

2) ε تشاكل حلقي:

$$\varepsilon\left(\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}\right)=\varepsilon\left(\frac{m_1.n_2+m_2n_1}{n_1.n_2}\right)=\frac{(m_1.n_2+m_2.n_1)1_R}{(n_1.n_2).1_R}$$

$$=\frac{m_1 1_R}{n_1 1_R}+\frac{m_2 1_R}{n_2 1_R}=\varepsilon\left(\frac{m_1}{n_1}\right)+\varepsilon\left(\frac{m_2}{n_2}\right)$$

وبالشكل نفسه نجد أن:

$$\varepsilon\left(\frac{m_1}{n_1}.\frac{m_2}{n_2}\right)=\varepsilon\left(\frac{m_1}{n_1}\right)+\varepsilon\left(\frac{m_2}{n_2}\right)$$

3) ε متباين:

$$\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2}\in\mathbb{Q} \quad \varepsilon\left(\frac{m_1}{n_1}\right)=\varepsilon\left(\frac{m_2}{n_2}\right)\longrightarrow\frac{m_1.1_R}{n_1.1_R}=\frac{m_2.1_R}{m_2.1_R}.$$

$$\frac{(m_1 \cdot n_2 - m_2 \cdot n_1)1_R}{(n_1 \cdot n_2)1_R} = 0$$

$\rightarrow (m_1 \cdot n_2 - m_2 \cdot n_1)1_R = 0$

$1_R \neq 0$ حسب $Char(R) = 0$

$\rightarrow m_1 \cdot n_2 - m_2 \cdot n_1 = 0 \longrightarrow m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$

ومنه $\rightarrow \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$

φ متباين.

3) غامر: $\frac{m \cdot 1_R}{n \cdot 1_R} \in F \; ; m, n \in \mathbb{Z} \; ; n \neq 0$

$\longrightarrow \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \;, \varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m\,1_R}{n\,1_R}$

ومما سبق يكون φ تماثل أي $\mathbb{Q} \cong F$

2) حسب مبرهنة 2-2-3 :

يحوي R حلقة جزئية مثل S تماثل $\mathbb{Z}_p$ $\quad S \cong \mathbb{Z}_p$

كل حلقة هي منطقة تكاملية

- $\mathbb{Z}_p$ منطقة تكاملية منتهية فهي حقل جزئي من R

واشتمالاً $S \cong \mathbb{Z}_p$ ومنه S حقل جزئي

---

3 _ الفصل الثالث: حلقة الحدوديات:

1.3 _ تعريف:

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة وليكن x متغير (متحول) نعرف المجموع المنتهي

حيث $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

معرفة على R حيث $a_i \in R$ $\quad \forall i \in 0, 1, \ldots, n$

1) a_n المعامل الرئيسي $\qquad \ell(f)=a_n$

2) نعرف درجة الحدودية $\qquad \deg(x)$

$a_n \neq 0 \qquad \deg(f)=n$ حيث $n\in N$

3) إذا كان $\ell(f)=1$ فإن الحدودية تسمى حدودية واحدية

4) إذا كانت ملخص $0\neq f\in\mathbb{R}$

(أي لا تحوي متغير) فإن الحدودية f تسمى حدودية ثابتة ودرجتها 0

5) $f=0$ تسمى حدودية صفرية ودرجتها ((اصطلاحاً)) $\deg(f)=\infty$

6) نعرف مجموعة كل الحدوديات على $\mathbb{R}$ بالشكل:

$$\mathbb{R}[x]=\{f=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \; ; a_i\in\mathbb{R} \; ; n\in N\}$$

7) نعرف على هذه المجموعات عملية تشكيل داخلية الضرب والجمع عندئذ:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$$

$(R,+,\cdot)$ تشكل حلقة وتسمى حلقة الحدوديات.

1) $f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{t}(a_i+b_i)x^i$

$t=\max[n,m] \; ; \; a_i=0 \; ; \; i>n$

$b_i=0 \; ; \; i>m$

2) $f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k \qquad k=n+m$

$$c_k=\sum_{k=i+j} a_i b_j$$

مثال:

$f(x)=x^2-2x+1 \qquad g(x)=x+3$

$a_0=1 \qquad a_1=-2 \qquad a_2=1$

$b_0=3 \qquad b_1=1$

$t=\max\{1,2\}=2$

★ $f(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2$

$=4-x+x^2$

$$* \; f(x).g(x) = \sum_{i=0}^{3} c_k x^k.$$

$c_0 = a_0 b_0 = 3 \qquad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = -5.$

$c_2 = a_0 b_2 + b_1 a_1 + a_2 b_0 = 0 - 2 + 3 = 1$

$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$

$f(x).g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

$3 - 5x + x^2 + x^3$

3-2-مبرهنة:

إذا كانت R حلقة تامة $f,g \in \mathbb{R}[x]$ (الحدوديات غير صفرية)

معرفة على $\mathbb{R}$ فإن العبارات التالية صحيحة.

1) $\deg(fg) \leq \deg(f) + \deg(g)$

وإذا كانت $f(g)$ قابل للقلب فإن

$\deg(f.g) = \deg(f) + \deg(g)$

2) إذا $f+g=0$

أو $\deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$

الإثبات:

1) لتكن $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$

$\deg(f) = m, \deg(g) = n.$

حسب تعريف ضرب الحدوديات $f.g = \sum_{k=0}^{m+n} c_k . x^k ; \quad c_k = \sum_{k=i+j} a_i b_j$

$C_{m+n} = a_0 b_{m+n} + a_1 b_{m+n-1} + \dots + a_m b_n + \dots + a_{m+n} b_0$

ممكن $a_n \neq 0 \; b_n \neq 0$ ؛ $C_{m+n} = a_n . b_n = 0$

إذن $C_{m+n} \neq 0$

/ /

عندئذ:

$$\deg(f.g) \leq m+n = \deg(f) + \deg(g).$$

$$f(g) = b_n$$

$$C_{m+n} \neq 0 \qquad \text{قابل للقلب فإن}$$

إذا فرضنا جدلاً أن:

$$0 \neq C_{m+n} = a_m b_n$$

b_n قابل للقلب

$$a_m = a_m . b_n . b_n^{-1} = b_n^{-1} . 0$$

$$0 . b_n^{-1} = a_m \qquad a_m \neq 0$$

وهذا تناقض

$$\deg(f.g) = m+n = \deg(f) + \deg(g)$$

(2 إذا كان

$$f+g = \sum_{i=0}^{t} (a_i + b_i) x^i$$

$t = \max[n, m]$

$$f+g = (a_t + b_t) x^t + (a_{t-1} + b_{t-1}) x^{t-1} + \dots + (a_0 + b_0) x^0$$

مثال:

$$f = 2x^2 + 3x - 1 \qquad g = -2x^2 + x - 2$$

$$\deg(f+g) = 1$$

$$\rightarrow \deg(f+g) \leq t = \max|m, n|$$

$$\max|\deg(f), \deg(g)|$$

تمرين:

*1 اذا كانت $\mathbb{R}$ منطقة تكاملية فإن حلقة الحدوديات $\mathbb{R}[x]$ المعرفة على $\mathbb{R}$ منطقة تكاملية.

$\mathbb{R}$ هي Id $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}[x]$ هي Id

*2 $\mathbb{R}$ حقل $\not\longleftarrow$ $\mathbb{R}[x]$ حقل (ليس بالضرورة)

*3 اذا كانت $\mathbb{R}$ حلقة ذات محايد فإن $\mathbb{R}[x]$ واحدية

*4 $\mathbb{R}$ تبديلية $\longleftarrow$ $\mathbb{R}[x]$ تبديلية.

نتيجة: الحلقة تحتفظ صفاتها لحلقة الحدوديات ولكن الحقل لا يحمل ذلك.