الطرائق العددية لحل معادلة الانتشار (انتشار الحرارة)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

طريقة FTCS :

وهي طريقة تقدمية بالنسبة للزمن مركزية بالنسبة للموضع

إن المعادلة تكتب على الشكل التالي

$$u_t(x_i, t_j) + a\, u_x(x_i, t_j)$$

الآن نطبق طريقة الفروق المنتهية (تقدمية للزمن ومركزية للموضع)

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = -a \; \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = -\frac{a\,\Delta t}{2\,\Delta x}\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right)$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{a\,\Delta t}{2\,\Delta x}\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right)$$

نفرض $\alpha = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$ فيصبح لدينا

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{\alpha}{2}\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right)$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{\alpha}{2} u_{i+1,j} + \frac{\alpha}{2} u_{i-1,j}$$

$$\Rightarrow \quad u_{i,j+1} = \frac{\alpha}{2} u_{i-1,j} + u_{i,j} - \frac{\alpha}{2} u_{i+1,j} \qquad \star$$

دراسة الاستقرار : نفرض لدينا حل من الشكل

$$\boxed{u_{n,j} = \lambda^j e^{ikn\Delta x}}$$

نعوض في $\star$

$$\lambda^{j+1} e^{ikn\Delta x} = \frac{\alpha}{2}\lambda^j e^{ik(n-1)\Delta x} + \lambda^j e^{ikn\Delta x} - \frac{\alpha}{2}\lambda^j e^{ik(n+1)\Delta x}$$

$$\lambda^{j+1} e^{ikn\Delta x} = \frac{\alpha}{2} \lambda^j e^{ikn\Delta x} \cdot e^{-ik\Delta x} + \lambda^j e^{ikn\Delta x} - \frac{\alpha}{2} \lambda^j e^{ikn\Delta x} \cdot e^{ik\Delta x}$$

$$= \lambda^j \left[\frac{\alpha}{2} e^{-ik\Delta x} + 1 - \frac{\alpha}{2} e^{ik\Delta x} \right] \cdot e^{ikn\Delta x}$$

$$\lambda^{j+1} = \lambda^j \left[\frac{\alpha}{2} e^{-ik\Delta x} + 1 - \frac{\alpha}{2} e^{ik\Delta x} \right]$$

$$= \lambda^j \left[1 - \alpha \left(\frac{e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}}{2} \right) \right]$$

$$= \lambda^j \left[1 - i\alpha \sin(k\Delta x) \right]$$

ولكي تكون الطريقة مستقرة يجب ان يكون $|1 - i\alpha \sin k(\Delta x)| \leq 1$

$$|1 - i\alpha \sin(k\Delta x)|^2 = 1 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x) > 1$$

فالطريقة غير مستقرة

خطأ الاقتطاع : يعطى بالصيغة $E = O(h^2) + O(k)$

ملاحظات :

1) $$u_{i,j} = u_i^j$$

حيث i تشير الى الموضع و j تشير الى الزمن

2) عند دراسة الاستقرار نفرض

$$u_{n,j} = \lambda^j e^{ikn\Delta x}$$

حيث i عقدي

ووضعنا n بدل i لكي لا يختلط علينا الرمز

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

طريقة Lax-wendroff

نشتق (1) بالنسبة لـ t ، وعلى أن u ~~تحليلية~~ فإن

u مشتقاته الجزئية موجودة ومستمرة $\Longleftarrow$ $u_{tx} = u_{xt}$

$$u_{tt} + a u_{xt} \Longrightarrow \boxed{u_{tt} = -a u_{tx}} \quad (2)$$

نشتق (1) بالنسبة لـ x

$$\boxed{u_{tx} = -a u_{xx}} \quad (2')$$

من (2) و (2') نجد

$$\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx}} \quad (3)$$

نعلم من منشور تايلور :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots$$

$$u(t+\Delta t, x) = u(t, x) + u_t(\Delta t) + u_{tt}\frac{1}{2}(\Delta t)^2$$

$$= u(t,x) - a u_x(\Delta t) + a^2 u_{xx} \cdot \frac{1}{2}(\Delta t)^2$$

$$u(t+\Delta t, x) - u(t,x) = -a u_x(\Delta t) + a^2 u_{xx} \cdot \frac{1}{2}(\Delta t)^2$$

$$\frac{u(t+\Delta t, x) - u(t,x)}{\Delta t} = -a u_x + a^2 u_{xx} \cdot \frac{1}{2}(\Delta t)$$

$$u_t + a u_x - a^2 u_{xx} \cdot \frac{1}{2}(\Delta t) = 0$$

نضع الفروق المركزية بالنسبة للموضع والتقدمية بالنسبة للزمن

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2(\Delta x)} - \frac{a^2}{2}(\Delta t)\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = -a\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2(\Delta x)} + \frac{a^2}{2}(\Delta t)\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = -\frac{a\,\Delta t}{2(\Delta x)}\left[u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right] + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right]$$

نفرض $a\dfrac{\Delta t}{\Delta x} = \alpha$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{\alpha}{2}\left[u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right] + \frac{\alpha^2}{2}\left[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right]$$

$$= u_{i,j} - \frac{\alpha}{2}u_{i+1,j} + \frac{\alpha}{2}u_{i-1,j} + \frac{\alpha^2}{2}u_{i+1,j} - \alpha^2 u_{i,j} + \frac{\alpha^2}{2}u_{i-1,j}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\right)}_{A} u_{i-1,j} + \underbrace{(1-\alpha^2)}_{B} u_{i,j} + \underbrace{\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\right)}_{C} u_{i+1,j} \quad \star$$

$$A = \frac{\alpha}{2}(1+\alpha) \qquad B = 1-\alpha^2 \qquad C = -\frac{\alpha}{2}(1-\alpha)$$

دراسة الاستقرار :

نفرض لدينا حل من الشكل :

$$\boxed{u_{n,j} = \lambda^j e^{inkDx}}$$

نعوض في $\star$

$$\lambda^{j+1} e^{iknDx} = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\right)\lambda^j e^{i(n-1)kDx} + (1-\alpha^2)\lambda^j e^{inkDx} + \left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\right)\lambda^j e^{i(n+1)kDx}$$

بالتقسيم على e^{iknDx}

$$\lambda^{j+1} = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\right)\lambda^j e^{-ikDx} + (1-\alpha^2)\lambda^j + \left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\right)\lambda^j e^{ikDx}$$

$$= \lambda^j\left[\frac{\alpha}{2}e^{-ikDx} + \frac{\alpha^2}{2}e^{-ikDx} + 1 - \alpha^2 - \frac{\alpha}{2}e^{ikDx} + \frac{\alpha^2}{2}e^{ikDx}\right]$$

$$= \lambda^j\left[\frac{\alpha^2}{2}\left(e^{ikDx} + e^{-ikDx}\right) - \frac{\alpha}{2}\left(e^{ikDx} - e^{-ikDx}\right) + 1 - \alpha^2\right]$$

$$= \lambda^j\left[\alpha^2\left(\frac{e^{ikDx} + e^{-ikDx}}{2}\right) - \alpha i\left(\frac{e^{ikDx} - e^{-ikDx}}{2i}\right) + 1 - \alpha^2\right]$$

$$= \lambda^j\left[\alpha^2\cos(kDx) - \alpha i\sin(kDx) + 1 - \alpha^2\right]$$

$$G = \alpha^2\cos(kDx) - \alpha^2 + 1 - \alpha i\sin(kDx)$$

$$G = 1 + \alpha^2(\cos(kDx) - 1) - \alpha i\sin(kDx)$$

$$G = 1 - \alpha^2(1-\cos k\Delta x) - \alpha i \sin k\Delta x$$

وعلمنا :

$$\sin^2 \frac{k\Delta x}{2} = \frac{1-\cos k\Delta x}{2}$$

$$G = 1 - 2\alpha^2 \sin^2\frac{k\Delta x}{2} - \alpha i \sin k\Delta x$$

$$|G|^2 = \left(1 - 2\alpha^2 \sin^2\frac{k\Delta x}{2}\right)^2 + \alpha^2 \sin^2 k\Delta x$$

$$= 1 - 4\alpha^2 \sin^2\frac{k\Delta x}{2} + 4\alpha^4 \sin^4\frac{k\Delta x}{2} + \alpha^2 \sin^2\frac{k\Delta x}{2}$$

لدينا :

$$\sin^2\theta = \left(2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$= 4\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$|G|^2 = 1 - 4\alpha^2\sin^2\frac{k\Delta x}{2} + 4\alpha^4\sin^4\frac{k\Delta x}{2} + \alpha^2\left[4\sin^2\frac{k\Delta x}{2}\left(1-\sin^2\frac{k\Delta x}{2}\right)\right]$$

$$= 1 - 4\alpha^2\sin^2\frac{k\Delta x}{2} + 4\alpha^4\sin^4\frac{k\Delta x}{2} + 4\alpha^2\sin^2\frac{k\Delta x}{2}$$

$$- 4\alpha^2\sin^4\frac{k\Delta x}{2}$$

$$= 1 + 4\alpha^4\sin^4\frac{k\Delta x}{2} - 4\alpha^2\sin^4\frac{k\Delta x}{2}$$

$$= 1 - 4\alpha^2(1-\alpha^2)\sin^4\frac{k\Delta x}{2} \le 1 - 4\alpha^2(1-\alpha^2)$$

وبالتالي حتى تكون الطريقة مستقرة يجب أن يكون

$$1-\alpha^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha^2 \le 1 \Rightarrow \alpha < 1$$

فالطريقة مستقرة

o

خطأ الاقتطاع :

$$E = o(h^2) + o(k^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$ Lax Friedrichs بطريقة

وهي طريقة تقدمية بالنسبة للزمن ومركزية للموضع

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = -a\,\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = -\frac{a}{2}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right)$$

بأن

$$u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}$$

$$u_{i,j+1} - \left(\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}\right) = -\frac{a}{2}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right)$$

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2} - \frac{a}{2}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right)$$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}\left[u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{i+1,j} + a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{i-1,j}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)u_{i-1,j} + \left(1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)u_{i+1,j}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)u_{i-1,j} + \frac{1}{2}\left(1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)u_{i+1,j}$$

نفرض $a\frac{\Delta t}{\Delta x} = \alpha$

$$= \frac{1}{2}(1+\alpha)\,u_{i-1,j} + \frac{1}{2}(1-\alpha)\,u_{i+1,j} \quad \star$$

$$u_{i,j+1} = A\,u_{i-1,j} + B\,u_{i,j} + C\,u_{i+1,j}$$

$$\Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2}(1+\alpha) \qquad B = 0 \qquad C = \frac{1}{2}(1-\alpha)$$

v

دراسة الاستقرار   نفرض لدينا حل من الشكل

$$\boxed{u_{n,j} = \lambda^j e^{ikn\Delta x}}$$ نعوض في ★

$$\lambda^{j+1} e^{ikn\Delta x} = \frac{1}{2}(1+\alpha)\lambda^j e^{ik(n-1)\Delta x} + \frac{1}{2}(1-\alpha)\lambda^j e^{ik(n+1)\Delta x}$$

$$= \frac{1}{2}(1+\alpha)\lambda^j e^{ikn\Delta x} \cdot e^{-ik\Delta x} + \frac{1}{2}(1-\alpha)\lambda^j e^{ikn\Delta x} \cdot e^{ik\Delta x}$$

$$\lambda^{j+1} = \lambda^j \left(\frac{1}{2}(1+\alpha) e^{-ik\Delta x} + \frac{1}{2}(1-\alpha) \cdot e^{ik\Delta x} \right)$$

$$= \lambda^j \left[\frac{e^{-ik\Delta x}}{2} + \alpha \frac{e^{-ik\Delta x}}{2} + \frac{e^{ik\Delta x}}{2} - \alpha \frac{e^{ik\Delta x}}{2} \right)$$

$$= \lambda^j \left[\frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2} + \alpha \left(-\frac{e^{ik\Delta x}}{2} + \frac{e^{-ik\Delta x}}{2} \right) \right]$$

$$= \lambda^j [\cos(k\Delta x) - i\alpha \sin(k\Delta x)]$$

$$|\cos(k\Delta x) - i\alpha\sin(k\Delta x)|^2 = \cos^2(k\Delta x) + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)$$

$$= 1 - \sin^2(k\Delta x) + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)$$

$$= 1 + \sin^2(k\Delta x)(-1+\alpha^2)$$

$$|G| \le 1 \Longrightarrow -1+\alpha^2 \le 0 \Longrightarrow \alpha^2 \le 1 \Longrightarrow \alpha \le 1$$ فالطريقة مستقرة

خطأ الاقتطاع :

$$E = O\left(\frac{h^2}{k}\right) + O(k) + O(h^2)$$

طريقة Up Wind : $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad a > 0$

وهي طريقة تقدمية بالنسبة للزمن تراجعية للموضع

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = -a\,\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \qquad (1)$$

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = -a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[u_{i,j} - u_{i-1,j}\right]$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{i,j} + a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{i-1,j}$$

نفرض

$$a\frac{\Delta t}{\Delta x} = \alpha$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \alpha\, u_{i,j} + \alpha\, u_{i-1,j}$$

$$u_{i,j+1} = (1-\alpha)\,u_{i,j} + \alpha\, u_{i-1,j} \qquad *$$

وهي العلاقة التكرارية للمعادلة المدروسة حيث ان العلاقة شكلها العام هي

$$u_{i,j+1} = A\,u_{i+1,j} + B\,u_{i,j} + C\,u_{i-1,j} \qquad **$$

بالمقارنة بين * و ** نجد

$$A = 0 \quad , \quad B = 1-\alpha \qquad C = \alpha$$

دراسة الاستقرار

نفرض

$$\varepsilon_{i,j} = N_{i,j} - D_{i,j}$$

حيث :

$N_{i,j}$ هو الحل العددي التقريبي

$D_{i,j}$ هو الحل الفعلي وبالتالي

$$N_{i,j} = \varepsilon_{i,j} + D_{i,j} \qquad (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathcal{E}_{i,j+1} + D_{i,j+1} - \mathcal{E}_{i,j} - D_{i,j}\right) + \frac{a}{\Delta x}\cdot$$

$$\left(\mathcal{E}_{i,j} + D_{i,j} - \mathcal{E}_{i-1,j} - D_{i-1,j}\right) = 0$$

بما أن $D_{i,j}$ حل محلي محقق للمعادلة التفاضلية وبالتالي

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathcal{E}_{i,j+1} - \mathcal{E}_{i,j}\right) + \frac{a}{\Delta x}\left(\mathcal{E}_{i,j} - \mathcal{E}_{i-1,j}\right) = 0 \qquad (2)$$

نفرض

$$\boxed{\mathcal{E}_{n,j} = E^{j} e^{ikn\Delta x}}$$

نعوض في (2)

$$\frac{1}{\Delta t}\left(E^{j+1} e^{ikn\Delta x} - E^{j} e^{ikn\Delta x}\right) + \frac{a}{\Delta x}\left(E^{j} e^{ikn\Delta x} - E^{j} e^{ik(n-1)\Delta x}\right) =$$

بالقسم على $e^{ikn\Delta x}$

$$\frac{1}{\Delta t}\left(E^{j+1} - E^{j}\right) + \frac{a}{\Delta x}\left(E^{j} - E^{j} e^{-ik\Delta x}\right) = 0$$

$$E^{j+1} - E^{j} + a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[1 - e^{-ik\Delta x}\right]E^{j} = 0$$

$$E^{j+1} = E^{j} - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[1 - e^{-ik\Delta x}\right]E^{j} = 0$$

نقسم على E^{j}

$$\frac{E^{j+1}}{E^{j}} = 1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[1 - e^{-ik\Delta x}\right]$$

$$G = 1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[1 - e^{-ik\Delta x}\right]$$

حتى تكون الطريقة مستقرة يجب أن يكون

$$|G| \leq 1$$

لدينا

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$1 - e^{-i\theta} = 1 - (\cos\theta - i\sin\theta) = (1-\cos\theta) + i\sin\theta$$

$$|1 - e^{-i\theta}|^2 = (1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta$$

$$= 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 1 - 2\cos\theta + 1 = 2 - 2\cos\theta$$

$$= 2(1-\cos\theta)$$

$$= 2.2\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right) \qquad \frac{1-\cos\theta}{2} = \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$|1 - e^{-i\theta}|^2 = 4\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow |1 - e^{-i\theta}| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

نعرض $|1 - e^{-i\theta}| = \beta$ وعبان $-1 \leq \sin\frac{\theta}{2} \leq 1$

فان $-2 \leq \beta \leq 2$

$$\Rightarrow 0 \leq \beta \leq 2 \qquad a\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

$$0 \geq -a\frac{\Delta t}{\Delta x}\beta \geq -2$$

$$1 \geq \underbrace{1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\beta}_{G} \geq -1$$

ومنه

$$|G| \leq 1$$

فالحل مستقرة

خطأ الاقتطاع :

$$E = o(h) + o(k)$$

up wind

$$\omega = 1+\lambda(\cos\theta-1) + i\lambda\sin\theta$$

$$\omega\omega^{*} = [1+\lambda(\cos\theta-1)]^2 + \lambda^2\sin^2\theta$$

$$= [1+\lambda^2(\cos\theta-1)^2 + 2\lambda(\cos\theta-1)] + \lambda^2\sin^2\theta$$

$$= [1+\lambda^2(\cos\theta-1)^2 + 2\lambda(\cos\theta-1)] + \lambda^2\sin^2\theta$$

$$= [1+\lambda^2(\cos^2\theta-2\cos\theta+1) + 2\lambda(\cos\theta-1)] + \lambda^2\sin^2\theta$$

$$= 1+2\lambda^2-2\lambda^2\cos\theta-4\lambda\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 1+4\sin^2\frac{\theta}{2}-4\lambda\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 1+4\lambda\sin^2\frac{\theta}{2}(\lambda-1)$$

$$= 1-4\lambda\sin^2\frac{\theta}{2}(1-\lambda)$$

بفرض $\lambda-1<0$ عندها $\lambda<1$ يوجد تقارب

إذاً $\lambda-1>0 \Leftarrow \lambda>1$ لن يكون هناك تقارب

طريقة كرنك نيكلسون :
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

وهي من الطرق الضمنية حيث تكتب المعادلة على الشكل التالي :

$$U_t(x_i, t_j) = -a U_x(x_i, t_{j+1})$$

وهذه الطريقة تقدمية للزمن ومركزية للموضع أي :

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{(\Delta t)} = -a\left(\frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}}{2\Delta x}\right)$$

$$U_{i,j+1} - U_{i,j} = -\frac{a\,\Delta t}{2\,\Delta x}\left(U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}\right)$$

نفرض
$$\alpha = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} - \frac{\alpha}{2}\left(U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}\right)$$

وهي العلاقة التكرارية

دراسة الاستقرار :

نفرض لدينا حل من الشكل

$$\boxed{U_{n,j} = \lambda^j e^{ikn\Delta x}}$$

نعوض في العلاقة التكرارية

$$\lambda^{j+1} e^{ikn\Delta x} = \lambda^j e^{ikn\Delta x} - \frac{\alpha}{2}\left(\lambda^{j+1} e^{ik(n+1)\Delta x} - \lambda^{j+1} e^{ik(n-1)\Delta x}\right)$$

بالاختصار على $e^{ikn\Delta x}$ يصبح لدينا

$$\lambda^{j+1} = \lambda^j - \frac{\alpha}{2}\left(\lambda^{j+1} e^{ik\Delta x} - \lambda^{j+1} e^{-ik\Delta x}\right)$$

$$\lambda^{j+1} = \lambda^j - \alpha\,\lambda^{j+1} i\left(\frac{e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}}{2i}\right)$$

$$\lambda^{j+1} = \lambda^j - \alpha\,\lambda^{j+1} i \sin(k\Delta x)$$

$$\lambda = 1 - \alpha\,\lambda\, i \sin(k\Delta x)$$

$$\lambda = 1 - i\alpha\lambda \sin(k\Delta x)$$

$$\lambda + i\alpha\lambda \sin(k\Delta x) = 1$$

$$\lambda\left(1 + i\alpha \sin(k\Delta x)\right) = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{1 + i\alpha \sin k\Delta x}$$

$$|\lambda|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 \sin^2 k\Delta x} \leq 1$$

فالطريقة مستقرة

و دائماً في هذه الخوارزمية لا يوجد شرط للاستقرار لأن الطريقة دائماً مستقرة

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad : \text{leap frog} \quad \text{طريقة}$$

وهي طريقة مركزية بالنسبة للزمن ومركزية بالنسبة للموضع

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2(\Delta t)} = -a\,\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2(\Delta x)}$$

$$u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = -\frac{a(\Delta t)}{\Delta x}\left[u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right]$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j-1} - a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right]$$

$$\alpha = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j-1} - \alpha\left[u_{i+1,j} - u_{i-1,j}\right]$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j-1} - \alpha u_{i+1,j} + \alpha u_{i-1,j} \qquad \star$$

وهي تمثل العلاقة التكرارية

دراسة الاستقرار نفرض ان الحل من الشكل

$$\boxed{u_{n,j} = \lambda^{j} e^{ikn\Delta x}}$$

ونعوض في $\star$

$$\lambda^{j+1} e^{ikn\Delta x} = \lambda^{j-1} e^{ikn\Delta x} - \alpha\lambda^{j} e^{ik(n+1)\Delta x} + \alpha\lambda^{j} e^{ik(n-1)\Delta x}$$

$$\lambda^{j+1} e^{ikn\Delta x} = \lambda^{j-1} e^{ikn\Delta x} - \alpha\lambda^{j} e^{ikn\Delta x}\cdot e^{ik\Delta x} + \alpha\lambda^{j} e^{ikn\Delta x}\cdot e^{-ik\Delta x}$$

بالاختصار على $e^{ikn\Delta x}$

$$\lambda^{j+1} = \lambda^{j-1} - \alpha\lambda^{j} e^{ik\Delta x} + \alpha\lambda^{j} e^{-ik\Delta x}$$

بالاختصار على λ^{j}

$$\lambda = \lambda^{-1} - \alpha e^{ik\Delta x} + \alpha e^{-ik\Delta x}$$

$$\lambda - \lambda^{-1} = -\alpha 2i\left(\frac{e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}}{2i}\right)$$

$$\lambda - \frac{1}{\lambda} = -2\alpha i \sin k\Delta x$$

$$\lambda - \frac{1}{\lambda} = -2\alpha i \sin k\Delta x$$ نضرب بـ λ

$$\lambda^2 - 1 = -2\alpha\lambda i \sin k\Delta x$$

$$\lambda^2 + 2\alpha i \sin k\Delta x\,\lambda - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (2\alpha i \sin k\Delta x)^2 - 4(1)(-1)$$

$$\Delta = -4\alpha^2 \sin^2 k\Delta x + 4$$

$$= 4 - 4\alpha^2 \sin^2 k\Delta x$$

$$= 4(1 - \alpha^2 \sin^2 k\Delta x)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \mp 2\sqrt{1-\alpha^2\sin^2(k\Delta x)}$$

$\alpha > 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta}$ تخيلي $\Rightarrow$ unstabl

$\alpha \leq 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta}$ حقيقي $\Rightarrow$ stable

$$\lambda = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\alpha i \sin k\Delta x \mp 2\sqrt{1-\alpha^2\sin^2 k\Delta x}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -i\alpha \sin k\Delta x \mp \sqrt{1-\alpha^2\sin^2 k\Delta x}$$

$\boxed{1}$ $\alpha \leq 1$

$$|\lambda|^2 = \alpha^2 \sin^2 k\Delta x + 1 - \alpha^2 \sin^2 k\Delta x$$

$$= \alpha^2(1-\cos^2 k\Delta x) + 1 - \alpha^2\sin^2 k\Delta x$$

$$= \alpha^2 - \alpha^2\cos^2 k\Delta x + 1 - \alpha^2\sin^2 k\Delta x$$

$$= \alpha^2 - \alpha^2(\cos^2 k\Delta x + \sin^2 k\Delta x) + 1 = 1 = \text{stable}$$

$\boxed{2}$ $\alpha > 1$

$P > 1$

السالب $\lambda_1 = -iP - \sqrt{1-P^2}$

$$= -iP - i\sqrt{P^2-1}$$

$$= |-i(\underbrace{P}_{\text{أكبر من الواحد}} + \sqrt{P^2-1})| > 1$$

الطريقة العددية لحل معادلة الموجة

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

عادن الوقت والموضع في معادلة الموجة مشتقاتهما من المرتبة الثانية لذا نستخدم الفروق المركزية في كل من الوقت والموضع ونعوضها في معادلة الموجة

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \frac{c^2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \right)$$

نفرض

$$S = \frac{c^2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = S\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \right)$$

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + S u_{i+1,j} - 2S u_{i,j} + S u_{i-1,j}$$

$$u_{i,j+1} = S\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} \right) + (2 - 2S) u_{i,j} - u_{i,j-1}$$

$$\boxed{u_{i,j+1} = S\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} \right) + 2(1-S)\, u_{i,j} - u_{i,j-1}}$$

وهي تمثل العلاقة التكرارية لمعادلة الموجة بعد تطبيق الفروق المركزية في كل من الموضع والزمن

دراسة الاستقرار :

لدراسة الاستقرار نفرض

$$\boxed{u_{n,j} = \lambda^{j} e^{ikn\Delta x}}$$

ونعوض في العلاقة التكرارية : (تكون الحل مستقرة بحالة $|\lambda| \leq 1$)

$$\boxed{u_{n,j} = \lambda^{j} e^{ikn\Delta x}}$$

* نعوض مكاني

فـ :

$$\lambda^{j+1} e^{ikn\Delta x} = S\left(\lambda^{j} e^{ik(n+1)\Delta x} + \lambda^{j} e^{ik(n-1)\Delta x}\right) + 2(1-S)\lambda^{j} e^{ikn\Delta x}$$

$$- \lambda^{j-1} e^{ikn\Delta x}$$

$$\lambda^{j+1} e^{ikn\Delta x} = S\left(\lambda^{j} e^{ikn\Delta x} \cdot e^{ik\Delta x} + \lambda^{j} e^{ikn\Delta x} \cdot e^{-ik\Delta x}\right) +$$

$$2(1-S)\lambda^{j} e^{ikn\Delta x} - \lambda^{j-1} e^{ikn\Delta x}$$

بالاختصار على $e^{ikn\Delta x}$ فـ :

$$\lambda^{j+1} = S\left(\lambda^{j} e^{ik\Delta x} + \lambda^{j} e^{-ik\Delta x}\right) + 2(1-S)\lambda^{j} - \lambda^{j-1}$$

بالاختصار على λ^{j}

$$\lambda = S\left(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}\right) + 2(1-S) - \lambda^{-1}$$

$$\lambda + \lambda^{-1} = S \cdot 2\left(\frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2}\right) + 2(1-S)$$

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = \underbrace{2S\cos(k\Delta x)} + 2 - \underbrace{2S}$$

بإخراج 2 عامل مشترك

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = 2 + 2S\left(\cos(k\Delta x) - 1\right)$$

سنرمز للحد $2 + 2S(\cos(k\Delta x) - 1)$ بالرمز P وبالتالي

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = P$$

إن $P \le 2$ وذلك لأن $\cos(k\Delta x) - 1 \le 0$

$$2(\cos(k\Delta x) - 1) \le 0 \implies 2 + 2(\cos(k\Delta x) - 1) \le 2 \implies P \le 2$$

وبالتالي أصبحت لدينا المعادلة :

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = p \quad \text{أو} \quad \lambda^2 - p\lambda + 1 = 0$$

والآن لنوجد جذري المعادلة السابقة

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = p^2 - 4(1)(1) \Longrightarrow \Delta = p^2 - 4 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{p^2-4}$$

وبالتالي فإن

$$\lambda_{\mp} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{p \mp \sqrt{p^2-4}}{2}$$

والآن لنميز حالتين :

① إذا كان $p^2-4>0$ هذا يعني أن $p<-2$ ، وبما أن p لا يمكن أن تكون أكبر من 2 وهذا يتضح من خلال دراسة الإشارة لـ $p^2-4>0$

$$p^2-4>0$$

	$-\infty$	-2		$+2$	$+\infty$
$p-2$	$-$		$-$	0	$+$
$p+2$	$-$	0	$+$		$+$
p^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$
	محققة				محققة

من الجدول نجد $p+2<0 \Longrightarrow p<-2$

$p-2<0 \Longrightarrow p<2$

وبما أن $p<-2$ فإن المعادلة التربيعية سيكون لها جذران حقيقيان مختلفان لكن أحد هذين الجذرين هو :

$$\lambda_- = \frac{p-\sqrt{p^2-4}}{2} < \frac{p}{2} < \frac{-2}{2} < -1 < -2$$

وبالتالي فإن $|\lambda| > |-2| \Longrightarrow |\lambda| > 2$ وبالتالي الجملة غير مستقرة

وطالما أن أحد الجذرين في حالة $p^2-4>0$ أدى إلى عدم استقرار الحل فلا داعي لمناقشة الجذر الحقيقي الآخر

② إذا كان $p^2-4 \le 0$ فهذا يعني أن $-2 \le p \le 2$

	$-\infty$		-2		$+2$		$+\infty$
$p-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$p+2$		$-$	0	$+$		$+$	
p^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

محققة

وبالتالي فإن $-2 \le p \le 2$

وفي هذه الحالة ستكون جذور المعادلة التربيعية جذوراً عقدية

$$\lambda_{\mp} = \frac{p \mp \sqrt{-(p^2-4)}}{2}$$

$$\lambda_{\mp} = \frac{p}{2} \mp i\frac{\sqrt{4-p^2}}{2}$$

حيث

$$|\lambda_{\mp}| = \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{4-p^2}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

لدينا

$$-2 \le p \le 2 \Leftarrow p^2-4 \le 0$$

لدينا

$$p = 2 + 2S(\cos(k\Delta x) - 1)$$

نعوض

$$-2 \le 2 + 2S(\cos(k\Delta x)-1) \le 2$$

والتي متراجحة محققة دوماً حيث

$$2 + 2S\left(\cos(k\Delta x) - 1\right) \leq 2$$

$$2S\left(\cos(k\Delta x) - 1\right) \leq 0$$

علماً ان $S \neq 0$ فان

$$\cos(k\Delta x) - 1 \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \cos(k\Delta x) \leq 1$$

وهي محققة دوماً

اما بالنسبة للمتراجحة اليسارية :

$$-2 \leq 2 + 2S\left(\cos(k\Delta x) - 1\right)$$

وفي أسوأ حالة حيث

$\cos(k\Delta x) \cong -1$ يصبح

$$-2 \leq 2 + 2S(-1 - 1)$$

$$-2 \leq 2 - 4S$$

وبالتالي فان شرط الاستقرار يصبح كالتالي

$$-4 \leq -4S$$

$$\Longrightarrow \quad S = c^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \leq 1$$

أوجد حل مسألة القيم الحدية التالية : $\quad 0 \le x \le 1$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \le x \le 1$$

$$u_t(x,0) = 0 \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad t > 0$$

وذلك بفرض

$$r = \frac{1}{2}, \quad h = \frac{1}{4}$$

حيث

① مرتبة ظاهرية : $\quad u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(\pi t)$ الحل الفعلي

الحل : $\quad h = \frac{1}{4}$, $r = \frac{1}{2}$ وبالتالي $k = rh = \frac{1}{8}$

إن العقد x_i تعطى بالعلاقة $x_i = ih$ حيث $i = 0,1,2,3,4$

وبالتالي $x_i = \frac{i}{4}$ وعندما $0 \le x \le 1$ فإن $i = 0,1,2,3,4$

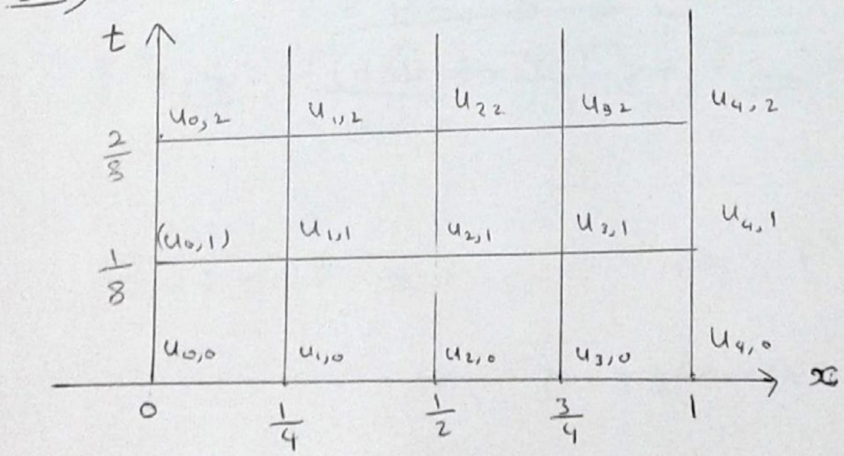
وإن $t_j = jk$ حيث $j = 0,1,2,\dots$

ولدينا من الشرط

$$u(x,0) = \sin(\pi x)$$

$$\Rightarrow \quad u_{i,0} = \sin(\pi x_i) = \sin\left(\pi \frac{i}{4}\right) \qquad i = 0,1,2,3,4$$

إن شبكة النقاط معطاة بالشكل التالي



إن العلاقة التكرارية في معادلة الموجة هي :

$\boxed{c = 1}$

$$u_{i,j+1} = s\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) + 2(1-s)\,u_{i,j} - u_{i,j-1}$$

حيث :

$$S = c^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} = c^2 \frac{k^2}{h^2} = \frac{(\frac{1}{8})^2}{(\frac{1}{4})^2} = \frac{1}{64} \times 16 = \frac{1}{4}$$

نعوض في العلاقة التكرارية :

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) + 2\left(1-\frac{1}{4}\right) u_{i,j} - u_{i,j-1}$$

$$u_{i,j+1} = \frac{3}{2} u_{i,j} + \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) - u_{i,j-1} \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

علماً أن

$$u_t(x,0) = 0$$

$$u_t = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \quad ★★$$

ان $u_t(x_i, t_j) = 0$ في $t_j = jk$

$$t_j = 0 \implies j = 0$$

بالتعويض في ★★

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2h} = 0 \implies \boxed{u_{i,1} = u_{i,-1}}$$

وبالتالي من اجل $j = 0$ نحصل على

$$u_{i,1} = \frac{3}{2} u_{i,0} + \frac{1}{4}\left(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}\right) - u_{i,-1}$$

وعلماً ان $u_{i,1} = u_{i,-1}$ نجد

$$u_{i,1} = \frac{3}{2} u_{i,0} + \frac{1}{4}\left(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}\right) - u_{i,1}$$

$$2u_{i,1} = \frac{3}{2} u_{i,0} + \frac{1}{4}\left(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}\right)$$

$$u_{i,1} = \frac{3}{4} u_{i,0} + \frac{1}{8}\left(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}\right)$$

$$i = 1, 2, 3$$

بالتعويض بالقيم الابتدائية وبتعويض قيم i في العلاقة الأخيرة نجد :

$i = 1 \Longrightarrow$

$$u_{1,1} = \frac{3}{4} u_{1,0} + \frac{1}{8}(u_{2,0} + u_{0,0})$$

لدينا

$$u_{i,0} = \sin(\pi \cdot \frac{i}{4})$$

$$u_{1,1} = \frac{3}{4} \sin(\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{8}\left(\sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(\pi \cdot 0)\right)$$

$$= \frac{3}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{8}(1 + 0) = 0.65533$$

$i = 2 \Longrightarrow$

$$u_{2,1} = \frac{3}{4} u_{2,0} + \frac{1}{8}(u_{3,0} + u_{1,0})$$

$$= \frac{3}{4} \sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{8}\left[\sin(\frac{3\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4})\right]$$

$$= 0.92678$$

$i = 3 \Longrightarrow$

$$u_{3,1} = \frac{3}{4} u_{3,0} + \frac{1}{8}(u_{4,0} + u_{2,0})$$

$$= \frac{3}{4} \sin(\frac{3\pi}{4}) + \frac{1}{8}\left(\sin(\pi) + \sin(\frac{\pi}{2})\right)$$

$$= 0.65593$$

لدينا $t_1 = 1k = k = \frac{1}{8}$

وبالتالي فإن الحل الفعلي :

$$u(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}) = u(\frac{3}{4}, \frac{1}{8}) = 0.65328$$

$$u(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}) = 0.92388$$

$$u_{tt} = u_{xx}$$

طريقة الضمنية :

$k = rh$

$r = \frac{k}{h}$

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \delta_x^2 (u_{i,j})$$

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \frac{k^2}{2} \delta_x^2 (u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$$

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \frac{k^2}{2h^2} \delta_x^2 (u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$$

أو :

$$= 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \frac{r^2}{2} \delta_x^2 (u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$$

$$-\frac{1}{8} u_{i-1,j+1} + \frac{5}{4} u_{i,j+1} - \frac{1}{8} u_{i+1,j+1} = 2u_{i,j} + \frac{1}{8} u_{i-1,j-1}$$

$$-\frac{5}{4} u_{i,j-1} + \frac{1}{8} u_{i+1,j-1} \quad \star$$

(هناك إيضاح للعلاقة في آخر المحاضرة)

لدينا الشرط الابتدائي $u_t(x,0) = 0$ وبنفس المناقشة في الحالة الظاهرية نجد

$$u_{i,-1} = u_{i,1}$$

وبالتالي من أجل $j=0$ نعوض في $\star$

$$-\frac{1}{8} u_{i-1,1} + \frac{5}{4} u_{i,1} - \frac{1}{8} u_{i+1,1} = 2u_{i,0} + \frac{1}{8} u_{i-1,-1}$$

$$-\frac{5}{4} u_{i,-1} + \frac{1}{8} u_{i+1,-1}$$

عان $\boxed{u_{i,-1} = u_{i,1}}$ نعوض في العلاقة السابقة

$$-\frac{1}{8} u_{i-1,1} + \frac{5}{4} u_{i,1} - \frac{1}{8} u_{i+1,1} = 2u_{i,0} + \frac{1}{8} u_{i-1,1}$$

$$-\frac{5}{4} u_{i,1} + \frac{1}{8} u_{i+1,1}$$

بالإصلاح :

$$\boxed{-\frac{1}{4} u_{i-1,1} + \frac{10}{4} u_{i,1} - \frac{1}{4} u_{i+1,1} = 2u_{i,0}} \quad \star\star$$

من أجل $i = 1, 2, 3$ فإننا نحصل على الجمل التالية وذلك بالتعويض في ** :

$$i = 1 \Longrightarrow -\frac{1}{4} U_{0,1} + \frac{10}{4} U_{1,1} - \frac{1}{4} U_{2,1} = 2 U_{1,0} \quad (1)$$

نفس الملاحظة في الحالة الظاهرية فإن.

$$U_{i,0} = \sin(\pi x_i) = \sin\left(\pi \frac{i}{4}\right)$$

وبالتالي

$$U_{1,0} = \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بالعودة للعلاقة (1)

$$-\frac{1}{4} U_{0,1} + \frac{10}{4} U_{1,1} - \frac{1}{4} U_{2,1} = 2 U_{1,0} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$i = 2 \Longrightarrow -\frac{1}{4} U_{1,1} + \frac{10}{4} U_{2,1} - \frac{1}{4} U_{3,1} = 2 U_{2,0}$$

$$-\frac{1}{4} U_{1,1} + \frac{10}{4} U_{2,1} - \frac{1}{4} U_{3,1} = 2 U_{2,0} = 2 \sin\left(\pi \frac{2}{4}\right)$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$i = 3 \Longrightarrow -\frac{1}{4} U_{2,1} + \frac{10}{4} U_{3,1} - \frac{1}{4} U_{4,1} = 2 U_{3,0}$$

$$-\frac{1}{4} U_{2,1} + \frac{10}{4} U_{3,1} - \frac{1}{4} U_{4,1} = 2 \sin\left(\pi \frac{3}{4}\right) = \sqrt{2}$$

- الشروط الحدية تبين أن $U_{i,j} = 0$ من أجل $i = 4$ حيث

$$U(x_i = 1, t_j \geq 0) = 0 \Longrightarrow U(x_4 = 1, t_j) = 0 \Longrightarrow U_{4,j} = 0 \quad \forall j$$

- الشروط الحدية تبين أن $U_{0,j} = 0$ حيث $(i = 0)$

$$U(x_i = 0, t_j) = 0 \Longrightarrow U(x_0 = 0, t_j) = 0 \Longrightarrow U_{0,j} = 0 \quad \forall j$$

cv

مشروطين بـ $u_{0,1} = 0$, $u_{4,1} = 0$ نحصل على

فاننا نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 8 \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

نحلها بطريقة غاوس

(Gauss elimination)

نحصل على

$$u_{1,1} = u_{3,1} = 0.65886$$

$$u_{2,1} = 0.93177$$

- ايضاح علاقة الطريقة الضمنية

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \frac{r^2}{2}\delta_x^2\left(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right)$$

$$\delta_x^2\left(u_{i,j+1}\right) = u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} \quad (1)$$

$$\delta_x^2\left(u_{i,j-1}\right) = u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1} \quad (2)$$

ثم نعوض في (1) و (2) في المقام h^2 لأننا استخرجناها في بداية العلاقة ومطلعها $r^2 = \frac{k^2}{h^2}$

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \frac{r^2}{2}\left[u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}\right]$$

$$u_{i,j+1} - \frac{r^2}{2}\left[u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}\right] = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \frac{r^2}{2}\left[u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}\right]$$

دراسة شرط CFL للمعادلة $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

تعاريف :

تعريف ١ :

منطقة تعريف المعادلات التفاضلية الجزئية : هي المنطقة التي يتحقق ضمنها الحل الفعلي

تعريف ٢ :

منطقة تعريف طريقة الفروق المنتهية : هي مجموعة كل النقاط المؤثرة على الحل التقريبي

تعريف ٣ : الشرط CFL :

هو شرط لازم ولكنه غير كافٍ للاستقرار ويشترط أن تقع جميع نقاط منطقة تعريف المعادلة التفاضلية الجزئية ضمن منطقة تعريف طريقة الفروق المنتهية التابعة لهذه المعادلة التفاضلية . يعني :

الحل الفعلي $\supseteq$ الحل التقريبي

- ملاحظة :

كي نستطيع تطبيق شرط CFl يجب أن يكون لدينا شكل الحل الفعلي .

مثال : لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

الشرط الابتدائي

$$u(0, x) = f(x)$$

ويعطى الحل الفعلي لهذه المعادلة بالشكل :

$$u(t, x) = f(x - at)$$

سنفترض أن :

$$\Delta t = t_{j+1} - t_j$$

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m$$

دراسة شرط CFL للمعادلة $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ بعدة طرائق:

1) طريقة up wind :

وهي طريقة تقدمية للزمن وتراجعية للمسافة أي:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} + a\,\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} = 0$$

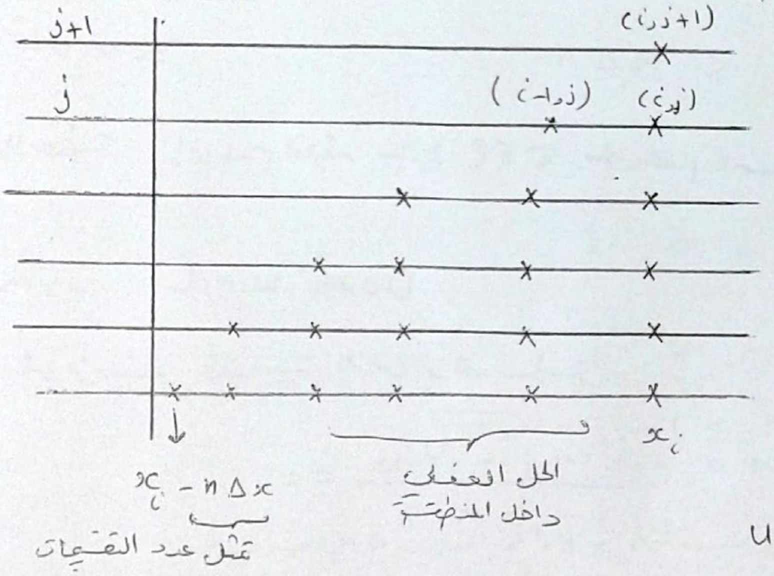
$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{a\,\Delta t}{\Delta x}\left[u_{i,j} - u_{i-1,j}\right]$$

نفرض $\lambda = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \lambda\left[u_{i,j} - u_{i-1,j}\right]$$

$$\boxed{u_{i,j+1} = (1-\lambda)\,u_{i,j} + \lambda\,u_{i-1,j}}$$

وهي تمثل العلاقة التكرارية



حيث يتم تعيين هذه النقاط بالاستفادة من العلاقة التكرارية فالنقطة (i,j+1) تتعين بالنقطتين (i,j) , (i-1,j)

وهكذا وللإيضاح

$$u_{i-1,j} = (1-\lambda)\,u_{i-1,j-1} + \lambda\,u_{i-2,j-1}$$

أي النقطة (i-1,j) لها (i-1,j-1) و (i-2,j-1)

$$u_{i,j} = (1-\lambda)\,u_{i,j-1} + \lambda\,u_{i-1,j-1}$$

أي النقطة (i,j) لها النقطتان (i,j-1) , (i-1,j-1)

ونتابع بنفس الأسلوب ..

١- ثانياً: شرط CFL

الحل العملي ⊇ الحل التقريبي

حسب الشكل $\Longrightarrow$

$$x_i - n\Delta x \leq x_i - a t_j$$

$$-n\Delta x \leq -a t_j$$

$$n\Delta x \geqslant a t_j \qquad t_j = j\Delta t$$

$$n\Delta x \geqslant a(j\Delta t)$$

في حالة $\boxed{j=n}$ عدد التقسيمات الأفقية يساوي عدد التقسيمات العامودية

$$n \geqslant a\, n\, \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$1 \geqslant a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Longrightarrow 1 \geqslant \lambda \Longrightarrow \lambda \leq 1$$

تحقق الشرط وبالتالي فإن تحقق لا يدل على استقرار الطريقة لذلك لابد من دراسة تحليل فورييه

- ملاحظة: إن عدم تحقق شرط CFL يبين عدم استقرار الطريقة

٢ طريقة Down wind

وهي طريقة تقدمية للزمن والمسافة

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta t} + a \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} = 0$$

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[U_{i+1,j} - U_{i,j}\right]$$

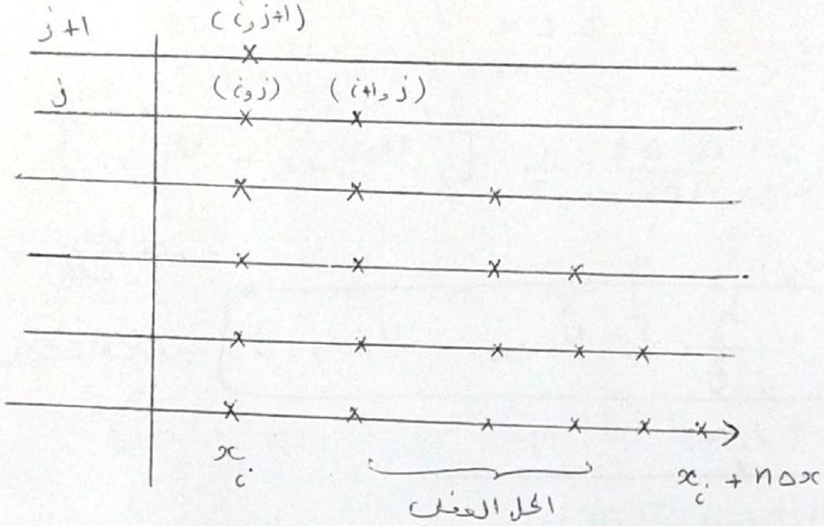
$$a\frac{\Delta t}{\Delta x} = \lambda$$

$$\Longrightarrow U_{i,j+1} = U_{i,j} - \lambda\left([U_{i+1,j}] - U_{i,j}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{U_{i,j+1} = (1+\lambda)\, U_{i,j} - \lambda\, U_{i+1,j}}$$ وهي العلاقة التكرارية

$$U_{i,j+1} = (1+\lambda) U_{i,j} - \lambda U_{i+1,j}$$

نوجد النقاط من العلاقة التكرارية كما سبق



شرط CFL :

الحل الفعلي $\subseteq$ الحل التقريبي

من الشكل $\quad x_i + n\Delta x \geq x_i - a t_j$

$$n\Delta x \geq -a t_j \qquad t_j = j\Delta t$$

$$j = n$$

$$n\Delta x \geq -a(n\Delta t)$$

$$1 \geq -a \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$1 \geq -\lambda$$

$$\Longrightarrow \quad -1 \leq \lambda$$

لم يتحقق الشرط وبالتالي الحلية غير مستقرة ولا داعي لتطبيق تحليل فورييه

- سوف نبين الآن أن هذا الشرط هو شرط غير كافي :

إذا استخدمنا التقدمية للزمن والمركزية للمسافة :

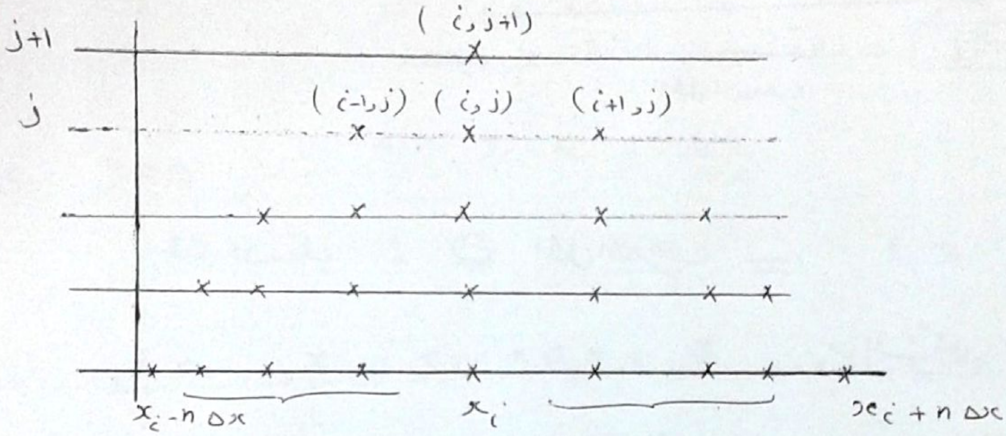
$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta t} + a \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta x} = 0$$

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta t} + a \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta x} = 0$$

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{2} \left[U_{i+1,j} - U_{i-1,j} \right]$$

$$a\frac{\Delta t}{\Delta x} = \lambda$$

$$\boxed{U_{i,j+1} = U_{i,j} - \frac{\lambda}{2} \left[U_{i+1,j} - U_{i-1,j} \right]}$$ وهي العلاقة التكرارية



من الشكل $x_i - n\Delta x \le x_i - a t_j \le x_i + n\Delta x$

$t_j = j\Delta t$ ، $n = j$

$$-n\Delta x \le -a \cdot n\Delta t \le n\Delta x$$

$$-\Delta x \le -a\Delta t \le \Delta x$$

$$-1 \le -a\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1$$

$$-1 \le -\lambda \le 1$$

$$\Longrightarrow 1 \geq \lambda \geq -1$$

$$\Longrightarrow |\lambda| \le 1$$

⇐ شرط CFL للاستقرار ومع ذلك فالحل غير مستقرة وذلك من خلال تحليل فورييه.

نعوض في العلاقة التكرارية

$$u_{n,j} = \lambda_1^{j} e^{ikn\Delta x}$$

$$\lambda_1^{j+1} e^{ikn\Delta x} = \lambda_1^{j} e^{ikn\Delta x} - \frac{\lambda}{2}\left[\lambda_1^{j} e^{ik(n+1)\Delta x} - \lambda_1^{j} e^{ik(n-1)\Delta x}\right]$$

λ_1 غير λ (لكي لا يحصل التباس)

$$\lambda_1^{j+1} = \lambda_1^{j} - \frac{\lambda}{2}\left[\lambda_1^{j} e^{ik\Delta x} - \lambda_1^{j} e^{-ik\Delta x}\right]$$

$$\cancel{\lambda_1}\ \lambda_1 = 1 - \frac{\lambda}{2}\left[e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}\right]$$

نفرض $\lambda_1 = G$

$$G = 1 - \lambda i \sin k\Delta x$$

$$|G|^2 = 1 + \lambda^2 \sin^2 k\Delta x$$

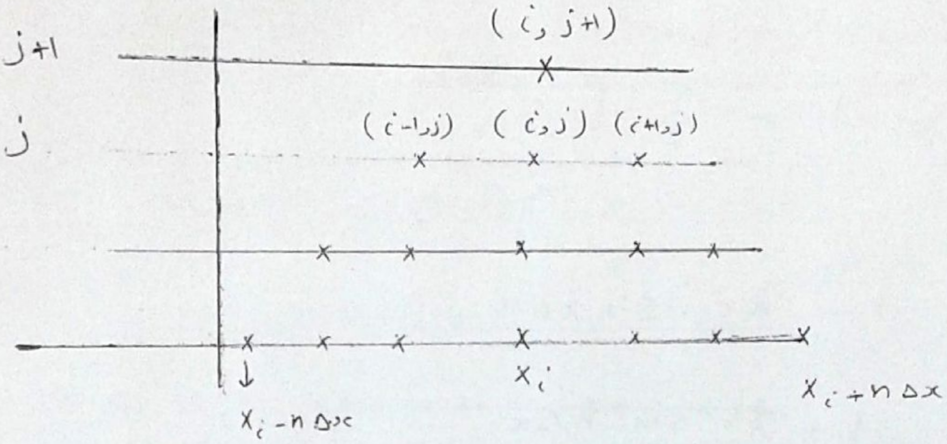
نلاحظ أن $|G| > 1$ فالطريقة غير مستقرة

دراسة شرط CFL

③ طريقة Lax-Wendroff

إن العلاقة التكرارية في هذه الطريقة درست سابقاً وهي من الشكل :

$$u_{i,j+1} = -\frac{\lambda}{2}(1-\lambda)\, u_{i+1,j} + (1-\lambda^2)\, u_{i,j} + \frac{\lambda}{2}(1+\lambda)\, u_{i-1,j}$$



$$x_i - n\Delta x \le x_i - a t_j \le x_i + n\Delta x$$

$$t_j = j\Delta t \qquad n = j$$

$$\Longrightarrow \quad -n\Delta x \le -a \cdot n\Delta t \le n\Delta x$$

$$\Longrightarrow \quad -1 \le -a\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1$$

$$-1 \le -\lambda \le 1 \Longrightarrow -1 \le \lambda \le 1$$

$$\Longrightarrow \quad |\lambda| \le 1 \Longrightarrow \lambda \le 1$$

وبالتالي تحقق شرط CFL ولكنه لا يكفي ليدل على استقرار الحل

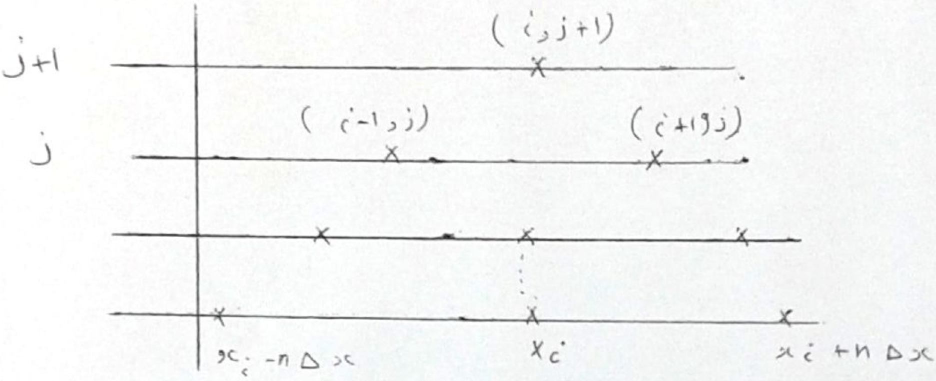
لذا نلجأ إلى طريقة تحليل فورييه ونقوم بها لدراسة الاستقرار

علماً أننا تناولنا الدراسة سابقاً.

٤) طريقة Lax - Friedrichs

العلاقة التكرارية درست سابقاً وهي

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(1-\lambda)\, u_{i+1,j} + \frac{1}{2}(1+\lambda)\, u_{i-1,j}$$



$$\lambda = a\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

أيضاً الملاحظة شبيهة بالحالات السابقة

$$x_i - n\Delta x \le x_i - a t_j \le x_i + n\Delta x$$

وملاحظة سابقة (مشابهة للسابقة) نجد $\lambda \le 1 \Leftarrow |\lambda| \le 1$

ومع ذلك فالطلبة تحتاج لدراسة طريقة تحليل فورييه وقد درسناها سابقاً

٥) طريقة Centered

$$u_{i,j+1} = -\frac{\lambda}{2} u_{i+1,j} + u_{i,j} + \frac{\lambda}{2} u_{i-1,j}$$

ملاحظة شرط CFL شبيهة بطريقة Lax-wendroff وبنفس الأسلوب نجد $\lambda \le 1$

ومع ذلك ندرس طريقة تحليل فورييه لبيان استقرار الطريقة أو عدم ذلك

٦) طريقة كرنك نيكلسون :

وهي طريقة ضمنية . وبالتالي فهي مستقرة دوماً وشرط CFL محقق دوماً

انتهى